미분기하학개론

–해답집–

제1장

1.36 <그림 1-38>과 같은 사면체 $OPQR$에서 $a=OP,\ b=OQ,\ c=OR,\ M$을 RQ의 중점이라 할 때, PM을 a,b,c에 대하여 구하여라.

〈풀이〉 $PR=OR-OP=c-a,\quad PQ=OQ-OP=b-a$

$$\therefore PM=\frac{1}{2}(PR+PQ)=\frac{1}{2}(c-a+b-a)=\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c-a$$

1.37 $a=2u_1+u_2-3u_3,\ b=u_1-2u_2+u_3,\ c=-u_1+2u_2-u_3$이라 할 때, $3a-2b+c$를 u_1,u_2,u_3으로 나타내어라.

〈풀이〉 $3a-2b+c=3(2u_1+u_2-3u_3)-2(u_1-2u_2+u_3)+(-u_1+2u_2-u_3)$

$$=3u_1+9u_2-12u_3$$

1.38 $|a\pm b\pm c|\leqq|a|+|b|+|c|$임을 보여라.

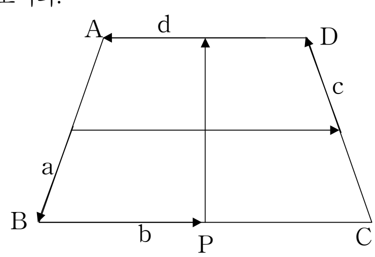
〈풀이〉 $b\pm c=d$ 라 하면, 문제 1.17에 의하여 $|a\pm d|\leqq|a|+|d|$이다.

$\therefore\ |a\pm b\pm c|=|a\pm d|\leqq|a|+|d|=|a|+|b\pm c|\leqq|a|+|b|+|c|$

$\Rightarrow\ |a\pm b\pm c|\leqq|a|+|b|+|c|$

1.39 사변형의 대변의 중점을 연결하는 두 선분의 중점은 서로 일치함을 보여라.

〈풀이〉 $AB=a,\ BC=b,\ CD=c,\ DA=d$라 하면



$a+b+c+d=0$이다. $\cdots$ ①

$$a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}d=QP,\ \ \frac{1}{2}a+b+\frac{1}{2}c=RS$$

QP의 중점을 M_1, RS의 중점을 M_2라 하면

$$QM_1=\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}d\right),\ \ QM_2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}a+b+\frac{1}{2}c\right)$$

$$\therefore\ AR+RM_2+M_1Q+QA=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}a+b+\frac{1}{2}c\right)-\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}d\right)+\frac{1}{2}d$$

$$=\frac{1}{4}(a+b+c+d)=0\ \ (\because\ ①\text{에 의해서})$$

$\therefore\ M_1$과 M_2는 한 점에서 만난다.

만약 M_1과 M_2가 한 점에서 만나지 않으면 $AR+RM_2+M_1Q+QA$의 값은 0이 아닌 다른 값을 가질 것이다.

1.40 삼각형의 세 내각의 이등분선은 한 점에서 만남을 보여라. (내심)

〈풀이〉 p와 q를 A'과 B'의 내각을 이등분한다고 하고 그 교점을 O라 하자.

$C'O$를 r이라 하면

$|OL|=|p|\sin A=|q|\sin B\ \cdots$ ①

$|OM|=|q|\sin B=|r|\sin\alpha\ \cdots$ ②

$|ON| = |p|\sin A = |r|\sin\beta \ \cdots$ ③

①,②,③을 연립하면 $|r|\sin\alpha = |r|\sin\beta \Rightarrow \alpha = \beta$ 또는 $\beta = \pi - \alpha$, $0 < \alpha + \beta < \pi$이므로 $\alpha = \beta$이다.

1.41 삼각형의 세 중선은 한 점에서 만남을 보여라. (무게중심)

〈풀이〉 벡터의 정의에 의하여

$c + d = s\left(c + \frac{1}{2}a\right)$, $a - d = t\left(\frac{1}{2}c + a\right)$이다. $\cdots$ ①

(단, s, t는 스칼라)

두 식을 연립하여 d를 소거하면

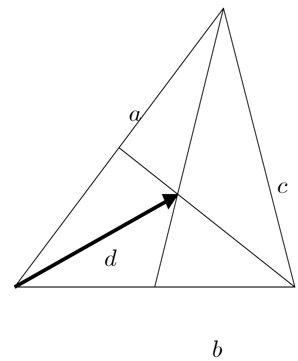
$\left(s + \frac{1}{2}t - 1\right)c - \left(1 - t - \frac{1}{2}s\right)a = 0$

a와 c는 서로 독립이므로(서로 종속이면 삼각형이 되지 않는다)

$\left(s + \frac{1}{2}t - 1\right) = 0$, $\left(1 - t - \frac{1}{2}s\right) = 0$

$\therefore\ s = t = \frac{2}{3}$이고 ①식에 대입하면

$d = \frac{2}{3}\left(a + \frac{1}{2}b\right)$이다.



1.42 일차독립인 벡터집합의 부분집합은 일차독립임을 증명하여라.

〈풀이〉 $A = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$을 일차독립인 벡터집합이라고 하면,

$k_1u_1 + k_2u_2 + \cdots + k_nu_n = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$이다.

$B = \{a_1, a_2, \cdots, a_r\} \subset A$을 일차종속인 벡터들의 집합이라고 하면, (단, $r < n$)

$m_1a_1 + m_2a_2 + \cdots + m_ra_r = 0 \Rightarrow m_1 \neq 0$인 상수 m_1이 존재한다. $\cdots$ ①

$A - B = C = \{b_1, b_2, \cdots, b_s\}$일 때, 이들의 일차결합을 생각하면 (단, $s + r = n$)

$l_1b_1 + l_2b_2 + \cdots + l_sb_s = 0 \ \cdots$ ② 인 상수 $l_1, l_2, \cdots, l_s$들이 존재한다.

①+②를 하면

$m_1a_1 + m_2a_2 + \cdots + m_ra_r + l_1b_1 + l_2b_2 + \cdots + l_sb_s = 0 \ \cdots$ ③

a_i와 b_j는 u_k들 중의 하나이므로

③은 결국 $u_1, u_2, \cdots, u_n$의 일차결합으로 표현된 것이다.

$\therefore\ m_1 = m_2 = \cdots = m_r = l_1 = l_2 = \cdots = l_s = 0$이 되어야 한다.

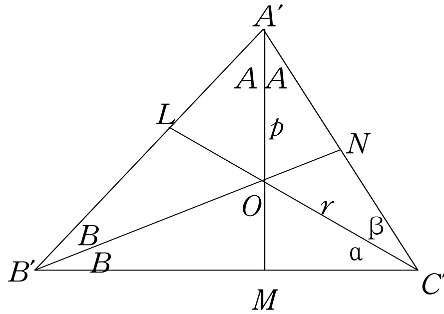
이것은 ①에 모순이다.

$\therefore$ 일차독립인 벡터집합의 부분집합은 일차독립.

1.43 E^2안의 두 개의 일차독립인 벡터는 E^2에서 하나의 기저를 이룸을 증명하여라.

〈풀이〉 e_1, e_2를 E^2안의 하나의 기저라 하고

$a = k_{11}e_1 + k_{12}e_2$, $b = k_{21}e_1 + k_{22}e_2$를 서로 일차독립인 벡터라 하자.



$\Rightarrow k_{11} \neq mk_{21},\ k_{12} \neq nk_{22}$ (단, m과 n은 상수)

$\Rightarrow \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{vmatrix} \neq 0$

$\therefore$ 정리 1.3에 의하여 a와 b는 E^2에서 하나의 기저를 이룬다.

1.44 E^2에서 3개 혹은 그 이상의 벡터는 일차종속임을 증명하여라.

〈풀이〉 i) a와 b를 E^2에서 일차독립인 벡터라 하자. 보충문제 1.43에 의하여 a와 b는 E^2에서 하나의 기저를 이루므로 c는 a와 b의 일차결합으로 표현되어진다.

$\therefore\ a,b,c$는 일차종속이다.

ii) a와 b가 일차종속이면 자명하다.

1.46 u_1,u_2,u_3를 하나의 기저라 하자. $a=u_1-2u_2+u_3,\ b=u_2-u_3,\ c=2u_1-u_2+5u_3$이 일차독립인지 아닌지를 말하라.

〈풀이〉 $a \cdot b \times c = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} -2 & \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$

$= 4-0+2 = 6 \neq 0$

$\therefore$ 정리 1.7에 의하여 a,b,c는 서로 일차독립이다.

1.47 u_1,u_2,u_3을 하나의 기저라 하고, $v_1=-u_1+u_2-u_3,\ v_2=u_1+2u_2-u_3,\ v_3=2u_1+u_3$이라 하자. 이 때, v_1,v_2,v_3가 하나의 기저임을 보이고, v_1,v_2,v_3에 관하여 $a=2u_1-u_3$의 성분을 구하여라.

〈풀이〉 $v_1 \cdot v_2 \times v_3 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$이므로 정리 1.3에 의하여 v_1,v_2,v_3는 하나의 기저가 된다.

위의 세 식을 연립하면 $u_1=-2v_1+v_2-v_3,\ u_3=4v_1-2v_2+3v_3$ 이므로

$a=2u_1-u_3=2(-2v_1+v_2-v_3)-(4v_1-2v_2+3v_3)=-8v_1+4v_2-5v_3$

1.48 $a=-e_1+e_2-2e_3,\ b=e_1-e_2+e_3$이라 할 때,

(a) $a \cdot b = -1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) - 2 \cdot 1 = -4$

(b) $|a| = \sqrt{(-1)^2+1^2+(-2)^2} = \sqrt{6}$

(c) $\cos \measuredangle (a,b) = \dfrac{a \cdot b}{|a||b|} = \dfrac{-4}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{3}} = -\dfrac{4}{3\sqrt{2}}$

(d) $P_b(a) = \dfrac{a \cdot b}{|b|} = -\dfrac{4}{\sqrt{3}}$

(e) $P_b(a) = \dfrac{(a \cdot b)b}{|b|^2} = -\dfrac{4}{3}(e_1-e_2+e_3)$

1.49 벡터 $a=2e_1+e_2-3e_3$의 방향코사인을 구하여라.

〈풀이〉 $|a| = \sqrt{2^2+1^2+(-3)^2} = \sqrt{14}$ 이므로 방향 코사인은 $\dfrac{2}{\sqrt{14}},\ \dfrac{1}{\sqrt{14}}, -\dfrac{3}{\sqrt{14}}$ 이다.

1.50 $a=xe_1+e_2-e_3$과 $b=2e_1-xe_2+e_3$이 수직이 되도록 x를 정하여라.

〈풀이〉 $a \cdot b=|a||b|\cos\measuredangle(a,b)$에서 $\measuredangle(a,b)=\dfrac{\pi}{2}$ 이므로 $a \cdot b=0$이어야 한다.

$$a \cdot b=2x-x-1=0 \Rightarrow x-1=0$$
$$\therefore\ x=1$$

1.51 $\alpha\gamma|a|^2-(\alpha\delta+\beta\gamma)(a \cdot b)+\beta\delta|b|^2$을 인수분해 하여라.

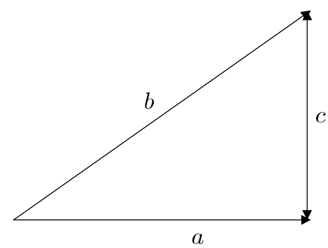
〈풀이〉 $|a|^2=a \cdot a,\ |b|^2=b \cdot b$이므로

$\alpha\gamma|a|^2-(\alpha\delta+\beta\gamma)(a \cdot b)+\beta\delta|b|^2$
$=\alpha\gamma(a \cdot a)-(\alpha\delta+\beta\gamma)(a \cdot b)+\beta\delta(b \cdot b)$
$=(\alpha \cdot a)(\gamma \cdot a)-(\alpha\delta+\beta\gamma)(a \cdot b)+(\beta \cdot b)(\delta \cdot b)$
$=(\alpha \cdot a-\beta \cdot b)(\gamma \cdot a-\delta \cdot b)=(\alpha a-\beta b)(\gamma a-\delta b)$

1.52 $a=e_1+e_2-e_3,\ b=-e_1+2e_2-2e_3$이라 할 때, a,b,c가 직각삼각형이 되도록 벡터 c를 정하여라.

〈풀이〉 $a \cdot b=-1+2+2=3\neq 0$이고, $|a|=\sqrt{3}$, $|b|=3$이므로 a와 b는 서로 수직이 아니고, b가 빗변이 된다. c는 $a-b$(또는 $b-a$)와 평행이므로 $c=k(2e_1-e_2+e_3)$로 표현할 수 있다. (단, k는 상수)

$|c|^2=|b|^2-|a|^2=9-3=6$이므로
$|c|^2=k^2(4+1+1)=6k^2=6 \Rightarrow k=\pm 1$
$\therefore\ c=\pm(2e_1-e_2+e_3)$



1.53 $g_1=\dfrac{1}{3}(2e_1-2e_2+e_3),\ g_2=\dfrac{1}{3}(e_1+2e_2+2e_3),\ g_3=\dfrac{1}{3}(2e_1+e_2-2e_3)$은 정규직교기저를 이루고 있음을 보이고 (e_1,e_2,e_3)을 (g_1,g_2,g_3)으로써 나타내어라.

〈풀이〉 $|g_1|=\dfrac{1}{3}\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}=1$

$|g_2|=\dfrac{1}{3}\sqrt{1^2+2^2+2^2}=1$

$|g_3|=\dfrac{1}{3}\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}=1$

$g_1 \cdot g_2=0,\ g_2 \cdot g_3=0,\ g_3 \cdot g_1=0$ 이므로 g_1,g_2,g_3는 정규직교기저를 이룬다. 위의 세 식을 연립하면

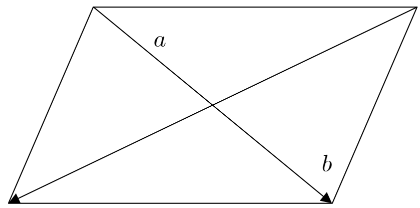
$$e_1=\frac{1}{3}(2g_1+g_2+2g_3),\ e_2=\frac{1}{3}(-2g_1+2g_2+g_3),\ e_3=\frac{1}{3}(g_1+2g_2-2g_3)$$

1.54 평행사변형의 모든 변의 길이의 제곱의 합은 대각선 길이의 제곱의 합과 같음을 보여라.

〈풀이〉 대각선 길이의 제곱의 합은

$$|a+b|^2+|b-a|^2=2|a|^2+2|b|^2$$

이는 평행사변형의 모든 변의 길이의 합이다.



1.55 만일 $a=e_1-2e_2+3e_3$, $b=2e_1-e_2-e_3$이라고 할 때

(a) $a\times b=\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}=5e_1+7e_2+3e_3$

(b) $b\times a=-(a\times b)=-5e_1-7e_2-3e_3$

(c) $a\cdot b\times c=[abc]=$

(d) $a\times(b\times c)=$

1.56 $a=e_1+e_2-e_3$, $b=-e_1-2e_2+e_3$에 수직인 단위벡터를 구하여라.

〈풀이〉 $a\times b=\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix}=-e_1-e_3$

$|a\times b|=\sqrt{2}$ 이므로 a와 b에 수직인 단위벡터는 $\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}(e_1+e_3)$이다.

1.57 평면 S위의 한 점 O에서 P까지의 벡터 $a=OP=e_1+e_2-e_3$과 $b=-e_1+e_3$, $c=e_1-e_2$가 S를 이룰 때, 한 점 P에서 S까지의 거리를 구하여라.

〈풀이〉 $d=|P_{b\times c}(a)|$이므로

$b\times c=\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}=e_1-e_2+e_3$

$\Rightarrow |b\times c|=\sqrt{3}$

$a\cdot b\times c=1-1-1=-1$이므로

$d=|P_{b\times c}(a)|=\left|\dfrac{1}{|b\times c|}(a\cdot b\times c)\right|=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

1.58 $[u_1u_2u_3][v_1v_2v_3]=\det\begin{pmatrix} u_1\cdot v_1 & u_1\cdot v_2 & u_1\cdot v_3 \\ u_2\cdot v_1 & u_2\cdot v_2 & u_2\cdot v_3 \\ u_3\cdot v_1 & u_3\cdot v_2 & u_3\cdot v_3 \end{pmatrix}$임을 증명하여라.

〈풀이〉 $u_i=a_{i1}e_1+a_{i2}e_2+a_{i3}e_3$, $i=1,2,3$

$v_j=b_{j1}e_1+b_{j2}e_2+b_{j3}e_3$, $j=1,2,3$이라 하면

$[u_1u_2u_3]=\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

$[v_1v_2v_3]=\det\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{pmatrix}$ $(\because det(B)=\det(B^T))$

$\det(A)\det(B)=\det(AB)$이므로

$[u_1u_2u_3][v_1v_2v_3]$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{12}+a_{13}b_{13} & a_{11}b_{21}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{23} & a_{11}b_{31}+a_{12}b_{32}+a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{12}+a_{23}b_{13} & a_{21}b_{21}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{23} & a_{21}b_{31}+a_{22}b_{32}+a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{12}+a_{33}b_{13} & a_{31}b_{21}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{23} & a_{31}b_{31}+a_{32}b_{32}+a_{33}b_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} u_1 \cdot v_1 & u_1 \cdot v_2 & u_1 \cdot v_3 \\ u_2 \cdot v_1 & u_2 \cdot v_2 & u_2 \cdot v_3 \\ u_3 \cdot v_1 & u_3 \cdot v_2 & u_3 \cdot v_3 \end{pmatrix}$$

1.59 $(a\times b)\cdot(c\times d)+(b\times c)\cdot(a\times d)+(c\times a)\cdot(b\times d)=0$을 증명하여라.

〈풀이〉 $[F_1]$에 의하여

$(a\times b)\cdot(c\times d)=(a\cdot c)(b\cdot d)-(a\cdot d)(b\cdot c)$

$(b\times c)\cdot(a\times d)=(b\cdot a)(c\cdot d)-(b\cdot d)(c\cdot a)$

$(c\times a)\cdot(b\times d)=(c\cdot b)(a\cdot d)-(c\cdot d)(a\cdot b)$

내적은 교환법칙이 성립하므로 (즉, $a\cdot b=b\cdot a$이므로)

$(a\times b)\cdot(c\times d)+(b\times c)\cdot(a\times d)+(c\times a)\cdot(b\times d)=0$

1.60 $[(a\times b)(c\times d)(e\times f)]=[a\ b\ d][c\ e\ f]-[a\ b\ c][de\ f]$임을 증명하여라.

〈풀이〉 $[F_2]$에 의하여

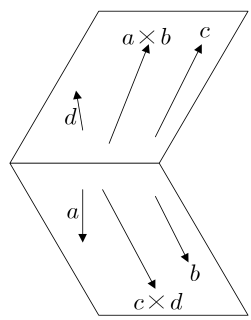
$(a\times b)\times(c\times d)=[a\ b\ d]c-[a\ b\ c]d$

$\Rightarrow (a\times b)\times(c\times d)\cdot(e\times f)=[a\ b\ d](c\cdot e\times f)-[a\ b\ c](d\cdot e\times f)$

$[a\ b\ d]$, $[a\ b\ c]$는 상수, $(c\cdot e\times f)=[c\ e\ f]$, $(d\cdot e\times f)=[d\ e\ f]$이므로

$\therefore\ [(a\times b)(c\times d)(e\times f)]=[a\ b\ d][c\ e\ f]-[a\ b\ c][de\ f]$

1.61 만일 a와 b가 c와 d를 포함하는 평면에 수직인 평면 위에 있을 때, $(a\times b)\cdot(c\times d)=0$임을 보여라.



〈풀이〉 a와 b를 포함하는 평면을 π_1, c와 d를 포함하는 평면을 π_2라 하면

$\measuredangle(\pi_1,\pi_2)=\dfrac{\pi}{2}$이다. $\cdots$ ①

$a\times b$는 π_2에, $c\times d$는 π_1에 속하므로 ①에 의해서

$\measuredangle(a\times b,\ c\times d)=\dfrac{\pi}{2}$이다.

$\therefore (a\times b)\cdot(c\times d)=0$

1.62 (u_1,u_2,u_3)을 임의의 기저라 하고, $v_1=\dfrac{u_2\times u_3}{[u_1u_2u_3]}$, $v_2=\dfrac{u_3\times u_1}{[u_1u_2u_3]}$,

$v_3=\dfrac{u_1\times u_2}{[u_1u_2u_3]}$라 하자. 이 때, (v_1,v_2,v_3)은 (u_1,u_2,u_3)와 쌍대(dual)임을 밝혀라.

〈풀이〉 즉, $u_i\cdot v_j=\delta_{ij}$, $i,j=1,2,3$

$$u_1\cdot v_1=\frac{u_1\cdot u_2\times u_3}{[u_1u_2u_3]}=1,\ u_1\cdot v_2=\frac{u_1\cdot u_3\times u_1}{[u_1u_2u_3]}=0,\ u_1\cdot v_3=\frac{u_1\cdot u_1\times u_2}{[u_1u_2u_3]}=0$$

$$u_2 \cdot v_1 = \frac{u_2 \cdot u_2 \times u_3}{[u_1 u_2 u_3]} = 0,\ u_2 \cdot v_2 = \frac{u_2 \cdot u_3 \times u_1}{[u_1 u_2 u_3]} = 1,\ u_2 \cdot v_3 = \frac{u_2 \cdot u_1 \times u_2}{[u_1 u_2 u_3]} = 0$$

$$u_3 \cdot v_1 = \frac{u_3 \cdot u_2 \times u_3}{[u_1 u_2 u_3]} = 0,\ u_2 \cdot v_2 = \frac{u_3 \cdot u_3 \times u_1}{[u_1 u_2 u_3]} = 0,\ u_3 \cdot v_3 = \frac{u_3 \cdot u_1 \times u_2}{[u_1 u_2 u_3]} = 1$$

이므로 $u_i \cdot v_j = \delta_{ij},\ i,j = 1,2,3$이다.

1.63 (u_1,u_2,u_3)과 (v_1,v_2,v_3)을 쌍대기저라 하자. 이 때, (v_1,v_2,v_3)은 (u_1,u_2,u_3)과 같은 방향을 가짐을 보여라.

〈풀이〉 $u_j = \sum_{i=1}^{3} b_{ij} v_i,\ v_j = \sum_{i=1}^{3} a_{ij} u_i$라 하면 보충문제 1.62로부터 $\sum_{k=1}^{3} a_{ik} b_{kj} = \delta_{ij}$이다.

$\det\left(\sum_{k=1}^{3} a_{ik} b_{kj}\right) = \det(a_{ij})\det(b_{ij})$ 이므로

$\det(a_{ij})\det(b_{ij}) = \det(\delta_{ij}) = 1$

$\det(a_{ij})$와 $\det(b_{ij})$는 같은 부호이다.

$\therefore (v_1,v_2,v_3)$은 (u_1,u_2,u_3)과 같은 방향을 갖는다.

1.64 유향기저의 두 동치류가 존재함을 보여라.

〈풀이〉 만일 (v_1,v_2,v_3)과 (w_1,w_2,w_3)이 (u_1,u_2,u_3)과 같은 방향을 갖지 않는다면, (v_1,v_2,v_3)과 (w_1,w_2,w_3)은 같은 방향을 가짐을 보여라. 따라서, 두 순서기저는 같은 방향이든지 혹은 반대 방향을 갖는다고 말할 수 있다.

$v_j = \sum_{i=1}^{3} a_{ij} u_i,\ w_j = \sum_{i=1}^{3} b_{ij} u_i$라하고, $u_j = \sum_{i=1}^{3} c_{ij} v_i = \sum_{i=1}^{3} c'_{ij} w_i$라 하자.

(v_1,v_2,v_3)과 (w_1,w_2,w_3)이 (u_1,u_2,u_3)과 같은 방향을 갖지 않는다고 하면 보충문제 1.63에 의하여 $\det(a_{ij})$와 $\det(c_{ij})$는 다른 부호이고, $\det(b_{ij})$와 $\det(c'_{ij})$는 다른 부호이다.

그런데 $\det(c_{ij})$와 $\det(c'_{ij})$는 같은 부호이므로, $\det(a_{ij})$와 $\det(b_{ij})$는 같은 부호이다.

$\therefore (v_1,v_2,v_3)$과 (w_1,w_2,w_3)이 (u_1,u_2,u_3)과 같은 방향을 갖지 않는다면,

(v_1,v_2,v_3)과 (w_1,w_2,w_3)은 같은 방향을 가진다.

보-1. 두 벡터$A = (a_1,a_2,a_3),\ B = (b_1,b_2,b_3)$가 collinear이기 위한 필요충분조건은 $a_1 : a_2 : a_3 = b_1 : b_2 : b_3$임을 증명하여라.

〈풀이〉 $\Rightarrow$) A,B가 collinear이므로 $A = mB$ 를 만족하는$m(\neq 0)$이 존재한다.

$\therefore\ a_i = mb_i (i = 1,2,3)$

$\Rightarrow\ a_1 : a_2 : a_3 = b_1 : b_2 : b_3$

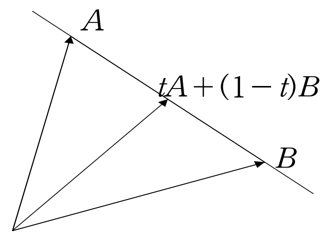
$\Leftarrow$) $a_1 : a_2 : a_3 = b_1 : b_2 : b_3$이므로 $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = n$를 만족하는$n(\neq 0)$이 존재한다.

$\Rightarrow\ a_i = nb_i (i = 1,2,3)$

$\Rightarrow\ A = nB$

$\therefore\ A$ 와B 는 collinear이다.

보-2. 세 벡터 $A=(a_1,a_2,a_3)$, $B=(b_1,b_2,b_3)$, $C=(c_1,c_2,c_3)$가 coplanar이기 위한 필요충분조건은 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=0$임을 증명하여라.



〈풀이〉 $\Rightarrow$) A,B,C 가 coplanar이므로

$C=mA+nB \Rightarrow c_i=ma_i+nb_i\,(i=1,2,3)$ 인m,n 이 존재한다.

$$\therefore \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ ma_1+nb_1 & ma_2+nb_2 & ma_3+nb_3 \end{vmatrix}=0$$

$\Leftarrow$) $A\cdot B\times C=0$이므로 한 벡터는 다른 두 벡터의 일차결합으로 표시된다. 즉, $C=mA+nB$를 만족하는 m,n이 존재한다.

$\therefore$ A,B,C : coplanar

보-3. 두 벡터A,B가 단위벡터이고, $\measuredangle(A,B)=\dfrac{2}{3}\pi$일 때, $tA+(1-t)B$의 크기를 최소로 하는 t의 값과 그 때의 의미는?

〈풀이〉 $|tA+(1-t)B|=\sqrt{t^2+2t(1-t)A\cdot B+(1-t)^2}$

$$=\sqrt{3t^2-3t+1}$$

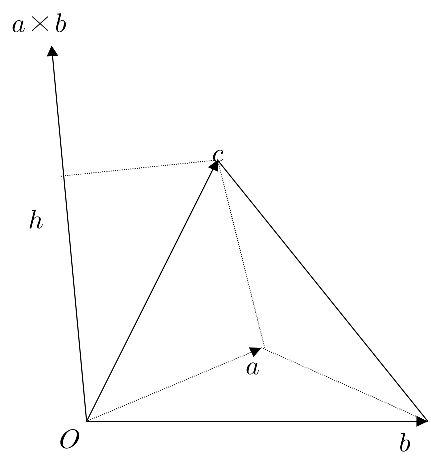
$$=\sqrt{3\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}$$

$\therefore$ $t=\dfrac{1}{2}$일 때, $tA+(1-t)B$는 최소값 $\dfrac{1}{2}$를 갖는다. 그 때의 $tA+(1-t)B$는 AB의 중점이다.

보-4. $A=(1,0,2)$, $B=(4,6,2)$, $C=(3,3,-6)$을 이웃하는 세 변으로 갖는 사면체의 부피는?

〈풀이〉

5. 사면체의 부피는 육면체의 부피의 $\dfrac{1}{6}$임을 증명하라.



〈풀이〉 사면체의 세 변을 a,b,c라 하면

밑넓이 : $S=\dfrac{1}{2}|a\times b|$

높이 : c를 $a\times b$에 사영한 것과 같으므로

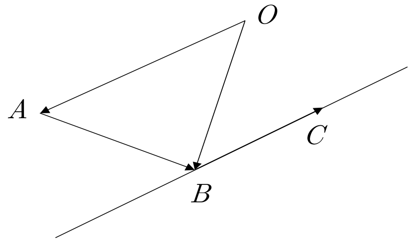
$$h=P_{a\times b}(c)=\frac{c\cdot a\times b}{|a\times b|}$$

사면체의 부피$=\dfrac{1}{3}\times$밑넓이$\times$높이이므로

$V=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}|a\times b|\dfrac{c\cdot a\times b}{|a\times b|}=\dfrac{1}{6}c\cdot a\times b$이므로

사면체의 부피는 육면체의 부피의 $\frac{1}{6}$이다.

보-6. $OA=(2,2,-1)$, $AB=(1,-1,2)$, $BC=(-2,2,3)$에 대하여 BC의 점 A에 관한 Moment Vector와 점 O에 관한 Moment Vector는?



〈풀이〉 점 A에 관한 Moment Vector를 M_A라 하면

$$M_A=AB\times BC=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -3 \end{vmatrix}=-i-j$$

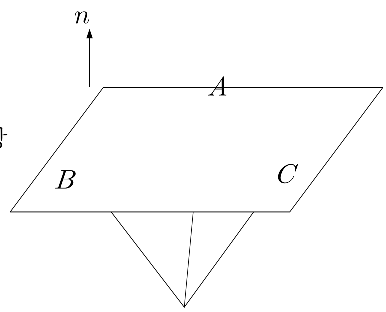
$\therefore\ M_A=(-1,-1,0)$

점 O에 관한 Moment Vector를 M_O라 하면

$$M_O=OB\times BC=(OA+AB)\times BC=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -3 \end{vmatrix}=-5i+7j+8k\ \ \therefore\ M_O=(-5,7,8)$$

제2장

2.39 점 $A(1,0,-1)$, $B(0,0,1)$, $C(-1,-1,0)$을 지나는 평면의 방정식을 구하여라.



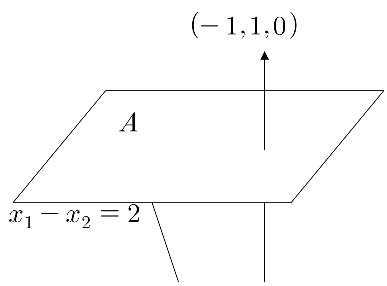
〈풀이〉 $BA=(-1,0,2)$, $BC=(1,1,1)$이므로

$$n=BA\times BC=\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-2e_1+3e_2-e_3$$

∴ 평면의 방정식은

$(x-a)\cdot n=0\Rightarrow 2x_1-3x_2+x_3=1$

2.40 점 $A(1,-1,0)$을 지나고 직선 $x_1=-k+1$, $x_2=k+1$, $x_3=3$에 수직인 평면의 방정식을 구하여라.



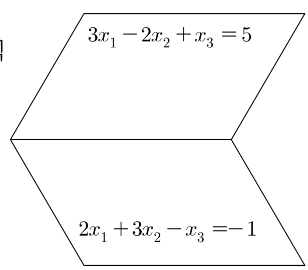
〈풀이〉 직선의 방향 vector는 $(-1,1,0)$이다.

$\therefore\ n=(-1,1,0)$

∴ 평면의 방정식은

$(x-a)\cdot n=0\ \Rightarrow\ x_1-x_2=2$

2.41 두 평면 $3x_1-2x_2+x_3=5$와 $2x_1+3x_2-x_3=-1$의 교선의 직선의 방정식을 구하여라.



〈풀이〉 $3x_1-2x_2+x_3=5\ \cdots$ ①

$2x_1+3x_2-x_3=-1\ \cdots$ ② 라 하자.

①+②를 하면

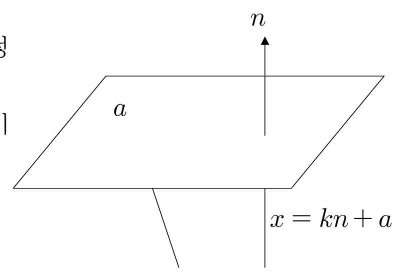
$5x_1 + x_2 = 4$ ⋯ ③을 ①과 ②식에 대입하면

$13x_1 + x_3 = 13$ 이므로

$x_3 = 13k$라 하면 $x_1 = -k+1$이고 이 값을 ③에 대입하면

$x_2 = 5k-1$이다. (단, $-\infty < k < \infty$)

2.42 a를 지나고 평면 $x \cdot n = d$, $|n| \neq 0$에 수직인 직선의 방정식은 $x = kn + a$, $-\infty < k < \infty$ 임을 증명하여라.

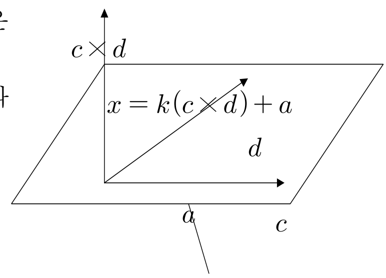


〈풀이〉 $x \cdot n = d$, $|n| \neq 0$이므로 연습문제 2.3에 의하여 n이 직선의 방향 vector가 된다.

∴ 직선의 방정식은 $x - a = kn$이므로

$x = kn + a$, $-\infty < k < \infty$

2.43 a를 지나고 c와 d, $c \times d \neq 0$에 수직인 직선의 방정식은 $x = k(c \times d) + a$임을 증명하여라.



〈풀이〉 $c \times d \neq 0$이므로 c와 d는 서로 독립이다. 직선은 c와 d에 수직이어야 하므로, 방향 vector는 $c \times d$이다.

∴ 직선의 방정식은 $x - a = k(c \times d)$이므로

$x = k(c \times d) + a$, $-\infty < k < \infty$이다.

2.44 $A(0,1,1)$을 정점, x_1−축과 평행한 축을 가지며, 반각 $\theta = 60^o$인 원추면의 방정식을 구하여라.

〈풀이〉 x_1−축과 평행한 축을 가지므로 $n = e_1$이다.

∴ x가 원추면 위에 있기 위한 필요충분 조건은

$|\measuredangle(x-a, n)| = |\cos\theta|$

혹은 $|(x-a) \cdot n| = |\cos\theta||x-a|$, 제곱하여 $[(x-a) \cdot n]^2 = k^2 (x-a) \cdot (x-a)$

이므로 대입하면

$$[(x_1 - 0, x_2 - 1, x_3 - 1) \cdot (1,0,0)]^2$$

$$= \frac{1}{4}(x_1 - 0, x_2 - 1, x_3 - 1) \cdot (x_1 - 0, x_2 - 1, x_3 - 1)$$

$$\Rightarrow {x_1}^2 = \frac{1}{4}\left\{{x_1}^2 + (x_2 - 1)^2 + (x_3 - 1)^2\right\}$$

∴ 원추면의 방정식은

$$3{x_1}^2 - (x_2 - 1)^2 - (x_3 - 1)^2 = 0$$

2.45 $-4 \leqq t \leqq 4$안의 정수 t에 대하여 벡터 $x = (t^3 + 1)e_1 + (1 - t^2)e_2$를 계산하고 이를 스케치하라.

〈풀이〉 $t = -4 \Rightarrow x = -63e_1 - 15e_2$

$t = -3 \Rightarrow x = -26e_1 - 8e_2$

$t = -2 \Rightarrow x = -7e_1 - 3e_2$

$t = -1 \Rightarrow x = 0$, $t = 1 \Rightarrow x = 2e_1$

$$t=2 \Rightarrow 9e_1-3e_2, \quad t=3 \Rightarrow 28e_1-8e_2, \quad t=4 \Rightarrow 65e_1-15e_2$$

2.46 $f(t)=(t^2+1)e_1+t^3e_3$, $g(t)=(\sin t)e_1-(\cos t)e_2$라 할 때,

(a) $f(a+b)=\{(a+b)^2+1\}e_1+(a+b)^3e_3$

$$=(a^2+2ab+b^2+1)e_1+(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)e_3$$

(b) $g(t+\Delta t)=\sin(t+\Delta t)e_1-\cos(t+\Delta t)e_2$

(c) $f(\sin t)\times g(t^2+1)$

$f(\sin t)=(\sin^2 t+1)e_1+\sin^3 t e_3$, $g(t^2+1)=\sin(t^2+1)e_1-\cos(t^2+1)e_2$ 이므로

$$f(\sin t)\times g(t^2+1)=\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \sin^2 t+1 & 0 & \sin^3 t \\ \sin(t^2+1) & -\cos(t^2+1) & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\{\cos(t^2+1)\sin^3 t\}e_1+\{\sin(t^2+1)\sin^3 t\}e_2-\{\cos(t^2+1)(1+\sin^2 t)\}e_3$$

2.47 $a=2e_1-e_2+e_3$, $b=e_1+e_2+e_3$이라 할 때, b는 $S_4(a)$에 속하는 것을 보이고, $S_\delta(b)$가 $S_4(a)$에 포함될 δ를 구하여라.

〈풀이〉 $b-a=-e_1+2e_2$이므로

$|b-a|=\sqrt{5}<4$

$\therefore\ b\in S_4(a)$

$x\in S_\delta(b)$라고 하면 $|x-b|<\delta$이다.

$|x-a|=|x-b+b-a|\leqq|x-b|+|b-a|<\delta+\sqrt{5}$

$\therefore\ \delta=4-\sqrt{5}$ 라고 하면

$|x-a|<\delta+\sqrt{5}=4-\sqrt{5}+\sqrt{5}$

$\therefore\ |x-a|<4$가 되므로 $x\in S_4(a)$이다.

$\therefore\ x\in S_{4-\sqrt{5}}(b) \Rightarrow x\in S_4(a)$이므로

$S_{4-\sqrt{5}}(b)\subset S_4(a)$

2.48 $\lim\limits_{t\to-1}\left[(t^2+1)e_1+e^te_2+\left\{\dfrac{(t^2-1)}{(t+1)}e_3\right\}\right]$을 계산하여라.

〈풀이〉 정리 2.3(44p)에 의하여

$$\lim_{t\to-1}\left[(t^2+1)e_1+e^te_2+\left\{\frac{(t^2-1)}{(t+1)}e_3\right\}\right]$$

$$=\lim_{t\to-1}(t^2+1)e_1+\lim_{t\to-1}e^te_2+\lim_{t\to-1}\frac{(t-1)(t+1)}{(t+1)}e_3$$

$$=\lim_{t\to-1}(t^2+1)e_1+\lim_{t\to-1}e^te_2+\lim_{t\to-1}(t-1)e_3$$

$$=2e_1+\frac{1}{e}e_2-2e_3$$

2.49 $f(t)=\dfrac{t^2+1}{t^2-1}e_1+\tan t e_2$가 불연속일 t의 값을 정하여라.

〈풀이〉 $f_1(t)=\dfrac{t^2+1}{t^2-1}=\dfrac{t^2+1}{(t-1)(t+1)}$, $f_2(t)=\tan t$라 하면

$f(t)$가 불연속일 조건은 $f_1(t)$, $f_2(t)$가 불연속이면 되므로

$t=1,-1,\ \dfrac{1}{2}\pi\pm n\pi$ (단, $n=1,2,3,\cdots$)이다.

2.50 $f(t)=(t^2-1)e_1+(\cos t)e_3$, $g(t)=(\sin t)e_1+e^t e_2$라 할 때

(a) $\lim\limits_{t\to 0}\{f(t)\cdot g(t)\}$

$f(t)\cdot g(t)=(t^2-1)\sin t$이므로 $\lim\limits_{t\to 0}\{f(t)\cdot g(t)\}=-1\cdot 0=0$

(b) $\lim\limits_{t\to 0}\{f(t)\times g(t)\}$

$$f(t)\times g(t)=\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ t^2-1 & 0 & \cos t \\ \sin t & e^t & 0 \end{vmatrix}=-e^t\cos t e_1+\sin t\cos t e_2+e^t(t^2-1)e_3 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{t\to 0}\{f(t)\times g(t)\}=\lim_{t\to 0}\{-e^t\cos t e_1+\sin t\cos t e_2+e^t(t^2-1)e_3\}=-e_1-e_3$$

2.51 만일 $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$가 I위에서 연속이라면, $f(t)\times\{g(t)\times h(t)\}$도 I위에서 연속임을 보여라.

〈풀이〉 정리 1.8(17p)에 의하여

$f(t)\times\{g(t)\times h(t)\}=\{f(t)\cdot h(t)\}g(t)-\{f(t)\cdot g(t)\}h(t)$ 이다.

$f(t)$, $g(t)$, $h(t)$가 I위에서 연속이므로

$\{f(t)\cdot h(t)\}g(t)$는 I위에서 연속이고, $\{f(t)\cdot g(t)\}h(t)$도 I위에서 연속이므로

$f(t)\times\{g(t)\times h(t)\}=\{f(t)\cdot h(t)\}g(t)-\{f(t)\cdot g(t)\}h(t)$는 I위에서 연속이다.

2.52 $u=(t^2+1)e_1-te^t e_2+\log t e_3$, $t>0$일 때

(a) $\dfrac{du}{dt}=2te_1-(t+1)e^t e_2+\dfrac{1}{t}e_3$

(b) $\dfrac{d^2u}{dt^2}=2e_1-(t+2)e^t e_2-\dfrac{1}{t^2}e_3$

2.53 $t=1$에서 $x=(t^2-2)e_1+(t+3)e_2+(t^4+4t+1)e_3$으로 표현되는 곡선의 접선의 방정식을 구하여라.

〈풀이〉 $t=1$일 때, $x=-e_1+4e_2+6e_3$이다.

점 x에서 곡선의 접선 vector는

$\dfrac{dx}{dt}=2te_1+e_2+(4t^3+4)e_3$이므로

$t=1$에서의 접선 vector는 $\dfrac{dx}{dt}=2e_1+e_2+8e_3$

$\therefore$ 접선의 방정식은 $y-x=k\dfrac{dx}{dt}\Rightarrow y=k\dfrac{dx}{dt}+x$ 이므로

$$y=(2k-1)e_1+(k+4)e_2+(8k+6)e_3 - \infty < k < \infty$$

2.54 $u=(2+t)e_2+\log te_3,\ v=\sin te_1-\cos te_2,\ t>0$일 때,

(a) $u\cdot v=-(2+t)\cos t$

$$\frac{d}{dt}(u\cdot v)=-\cos t+(2+t)\sin t$$

(b) $u\times v=\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & 2+t & \log t \\ \sin t & -\cos t & 0 \end{vmatrix}$

$$=e_1\begin{vmatrix} 2+t & \log t \\ -\cos t & 0 \end{vmatrix}-e_2\begin{vmatrix} 0 & \log t \\ \sin t & 0 \end{vmatrix}+e_3\begin{vmatrix} 0 & 2+t \\ \sin t & -\cos t \end{vmatrix}$$

$$=\cos t\cdot\log te_1+\sin t\cdot\log te_2-(2+t)\sin te_3$$

2.55 $u=e^te_1+2\sin te_2+(t^2+1)e_3,\ t=\theta^2+2,\ t\geqq 2$라 할 때, t에 대한 함수로서 $\dfrac{du}{d\theta}$와 $\dfrac{d^2u}{d\theta^2}$을 구하여라.

〈풀이〉 연쇄법칙에 의하여 (보충문제 2.74에서 증명)

$$\frac{du}{d\theta}=\frac{du}{dt}\frac{dt}{d\theta}\text{이고, } \theta=\pm(t-2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{du}{dt}=e^te_1+2\cos te_2+2te_3,\ \frac{dt}{d\theta}=2\theta=\pm 2(t-2)^{\frac{1}{2}}\text{이므로}$$

$$\frac{du}{d\theta}=\frac{du}{dt}\frac{dt}{d\theta}=\pm 2(t-2)^{\frac{1}{2}}\left(e^te_1+2\cos te_2+2te_3\right)\text{이다.}$$

$$\pm 2(t-2)^{\frac{1}{2}}\left(e^te_1+2\cos te_2+2te_3\right)=v\text{라 하면 } \frac{d^2u}{d\theta^2}=\frac{dv}{d\theta}=\frac{dv}{dt}\frac{dt}{d\theta}\text{이고,}$$

$$\frac{d}{dt}2(t-2)^{\frac{1}{2}}=(t-2)^{-\frac{1}{2}},\ \frac{d}{dt}\left(e^te_1+2\cos te_2+2te_3\right)=e^te_1-2\sin te_2+2e_3\text{이므로}$$

$$\frac{dv}{dt}=\pm(t-2)^{-\frac{1}{2}}\left(e^te_1+2\cos te_2+2te_3\right)\pm 2(t-2)^{\frac{1}{2}}(e^te_1-2\sin te_2+2e_3)$$

$$\therefore \frac{d^2u}{d\theta^2}=\pm\{(4t-6)e^te_1+[4\cos t-(8t-16)\sin t]e_2+(12t-16)e_3\}$$

2.56 $\dfrac{d}{dt}\left(u\cdot\dfrac{dv}{dt}-\dfrac{du}{dt}\cdot v\right)=u\cdot\dfrac{d^2v}{dt^2}-\dfrac{d^2u}{dt^2}\cdot v$가 성립함을 보여라.

〈풀이〉 공식 $[J_3]$ (49p)에 의하여

$$\frac{d}{dt}\left(u\cdot\frac{dv}{dt}-\frac{du}{dt}\cdot v\right)=\frac{du}{dt}\cdot\frac{dv}{dt}+u\cdot\frac{d^2v}{dt^2}-\frac{d^2u}{dt^2}\cdot v-\frac{du}{dt}\cdot\frac{dv}{dt}$$

$$=u\cdot\frac{d^2v}{dt^2}-\frac{d^2u}{dt^2}\cdot v$$

2.57 $f(t)=\cos te_1+(t^2+2t+1)e_2$의 $t=0$을 중심으로 하는 Taylor의 전개식에서 최초의 3개항을 구

하여라.

〈풀이〉 $f(0)=e_1+e_2$

$f'(t)=-\sin t e_1+(2t+2)e_2 \Rightarrow f'(0)=2e_2$

$f''(t)=-\cos t e_1+2e_2 \Rightarrow f''(0)=-e_1+2e_2$ 이므로 Taylor의 공식(52p)에 의하여

$$f(t)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}(t-0)+\frac{f''(0)}{2!}(t-0)^2$$

$$=(e_1+e_2)+2te_2+\frac{1}{2}t^2(-e_1+2e_2)$$

2.58 도함수의 정의($\Delta-$과정)를 이용하여

$\dfrac{d}{dt}\left[(t^2+1)e_1+\left(\dfrac{1}{t+1}\right)e_2+e_3\right]=2te_1-\left(\dfrac{1}{(t+1)^2}\right)e_2$임을 보여라.

〈풀이〉 ※ 도함수의 정의

$$f'(t)=\frac{df}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$$

$$\frac{d}{dt}\left[(t^2+1)e_1+\left(\frac{1}{t+1}\right)e_2+e_3\right]=\frac{d}{dt}(t^2+1)e_1+\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t+1}\right)e_2+\frac{d}{dt}e_3$$

① $f(t)=t^2+1$이라 하면

$f(t+\Delta t)=(t+\Delta t)^2=t^2+2t\Delta t+(\Delta t)^2$ 이므로

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{t^2+2t\Delta t+(\Delta t)^2-t^2}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{2t\Delta t+(\Delta t)^2}{\Delta t}=2t$$

② $g(t)=\dfrac{1}{t+1}$이라 하면

$g(t+\Delta t)=\dfrac{1}{t+\Delta t+1}$ 이므로

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{g(t+\Delta t)-g(t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left(\frac{1}{t+\Delta t+1}-\frac{1}{t+1}\right)$$

$$\Rightarrow\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left(\frac{t+1-(t+\Delta t+1)}{(t+\Delta t+1)(t+1)}\right)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left(\frac{\Delta t}{(t+\Delta t+1)(t+1)}\right)$$

$$\Rightarrow\lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{1}{(t+\Delta t+1)(t+1)}\right)=\frac{1}{(t+1)^2}$$

③ $h(t)=1$이라 하면

$h(t+\Delta t)=1$ 이므로

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{h(t+\Delta t)-h(t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{0}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}0=0$$

①, ②, ③에 의하여

$$\frac{d}{dt}\left[(t^2+1)e_1+\left(\frac{1}{t+1}\right)e_2+e_3\right]=\frac{d}{dt}(t^2+1)e_1+\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t+1}\right)e_2+\frac{d}{dt}e_3$$

2.59 만일 u와 v가 t에 관하여 미분가능한 함수일 때, $\dfrac{d}{dt}(u\cdot v)=u\cdot\dfrac{dv}{dt}+\dfrac{du}{dt}\cdot v$가 성립함을 보여라.

〈풀이〉 $w(t)=u(t)\cdot v(t)$라 하자.

$$\frac{d}{dt}(u \cdot v) = \frac{dw}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{w(t+\Delta t) - w(t)}{\Delta t}$$
$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{u(t+\Delta t) \cdot v(t+\Delta t) - u(t) \cdot v(t)}{\Delta t}$$
$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{u(t+\Delta t)\{v(t+\Delta t) - v(t)\} + \{u(t+\Delta t) - u(t)\}v(t)\}}{\Delta t}$$
$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{u(t+\Delta t)\{v(t+\Delta t) - v(t)\}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\{u(t+\Delta t) - u(t)\}v(t)\}}{\Delta t}$$
$$\therefore \frac{d}{dt}(u \cdot v) = u \cdot \frac{dv}{dt} + \frac{du}{dt} \cdot v$$

2.60 $\frac{du}{dt} = (3t^2+1)e_1 + t^3 e_2 - \sin t e_3$인 모든 u를 구하여라.

〈풀이〉 $u = (t^3 + t + C_1)e_1 + \left(\frac{1}{4}t^4 + C_2\right) + (\cos t + C_3)e_3$

2.61 $\frac{d^2u}{dt^2} = at^2 + bt + c,\ a, b, c =$상수를 만족하는 모든 u를 구하여라.

〈풀이〉 $u = \frac{1}{12}at^4 + \frac{1}{6}bt^3 + \frac{1}{2}ct^2 + C_1 t + C_2$

2.62 $u \times \frac{du}{dt} = 0$이기 위한 필요충분조건은 u가 일정방향을 가지는 것임을 증명하여라.

〈풀이〉 $\Rightarrow$) $u \times \frac{du}{dt} = 0 \Rightarrow u = 0$ 또는 $\frac{du}{dt} = 0$

i) $\frac{du}{dt} = 0 \Rightarrow u = C$ (constant vector)

ii) $u = 0$ (constant vector)

i), ii)에 의하여 u는 일정방향을 가진다.

$\Leftarrow$) u가 일정방향을 가진다고 하면 $u = C'$ (constant vector, 0도 포함)이므로

$\frac{du}{dt} = 0 \Rightarrow u \times \frac{du}{dt} = 0$

2.63 $t = 0$에서 $(\tan^2 t)e_1 + (2t^3 + t^4)e_2 = O(t^2)$임을 보여라.

〈풀이〉 $\lim_{t \to 0} \frac{(\tan^2 t)e_1 + (2t^3 + t^4)e_2}{t^2} = \lim_{t \to 0} \frac{(\tan^2 t)e_1}{t^2} + \lim_{t \to 0} \frac{(2t^3 + t^4)e_2}{t^2}$

$$\Rightarrow \lim_{t \to 0} \frac{(\sin^2 t)e_1}{t^2 \cos^2 t} + \lim_{t \to 0}(2t + t^2)e_2 = \lim_{t \to 0} \frac{(\sin^2 t)}{t^2} \frac{e_1}{\cos^2 t} = e_1$$

$\therefore\ e_1 < M$이면 $\lim_{t \to 0} \frac{(\tan^2 t)e_1 + (2t^3 + t^4)e_2}{t^2} < M$: bounded

$\therefore\ (\tan^2 t)e_1 + (2t^3 + t^4)e_2 = O(t^2)$

2.64 $f(t)$가 $t=t_0$에서 해석적이고 $f'(t_0)=0, f''(t_0)=0, \cdots, f^{(n)}(t_0)=0$, $f^{(n+1)}(t_0)\neq 0$이라 하자. 이때, $f^{(n+1)}(t_0)$는 t_0에서 곡선 $x=f(t)$의 접선벡터임을 보여라.

〈풀이〉 $f'(t_0)=\dfrac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$ $\cdots$ ①

$$f''(t_0)=\frac{f'(t)-f'(t_0)}{t-t_0} \quad \cdots \text{②}$$

$$\vdots$$

$$f^{(n+1)}(t_0)=\frac{f^{(n)}(t)-f^{(n)}(t_0)}{t-t_0} \quad \cdots \text{ⓝ}$$

①에서 ⓝ까지의 식을 전부 더하면

$$f'(t_0)+f''(t_0)+\cdots+f^{(n+1)}(t_0)$$

$$=\frac{f(t)-f(t_0)+f'(t)-f'(t_0)+\cdots+f^{(n)}(t)-f^{(n)}(t_0)}{t-t_0} \quad \cdots *$$

$f'(t_0)=f''(t_0)=\cdots=f^{(n)}(t_0)=0$이므로 $*$은

$\dfrac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}=f^{(n+1)}(t_0)$이 되므로 $f^{(n+1)}(t_0)$는 접선벡터이다.(문제잘못풀었음)

2.65 $f(t)=\begin{cases} e^{-(1/t)^2}, & t\neq 0 \\ 0, & t=0 \end{cases}$이라 할 때 모든 n에 대하여 $f^{(n)}(0)=0$임을 보여라.

〈풀이〉 $f(t)=e^{-\frac{1}{t^2}}=e^{-\frac{1}{t^2}}g_0(t)$

$$f'(t)=-\frac{2}{t^3}e^{-\frac{1}{t^2}}=e^{-\frac{1}{t^2}}g_1(t)$$

$$f'(t)=\frac{4}{t^6}e^{-\frac{1}{t^2}}+\frac{6}{t^4}e^{-\frac{1}{t^2}}=e^{-\frac{1}{t^2}}\left(\frac{4}{t^6}+\frac{6}{t^4}\right)=e^{-\frac{1}{t^2}}g_2(t)$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(t)=e^{-\frac{1}{t^2}}g_n(t)=f(t)\,g_n(t)$$

$$\therefore\ f^{(n)}(0)=f(0)\,g_n(0)=0$$

2.66 $S_{1/100}(2)$안의 모든 t에 대하여 벡터 $x=(t^2+1)e_1+(t+1)e_2-te_3$은 $S_{1/10}(5e_1+3e_2-2e_3)$안에 놓여 있음을 보여라.

〈풀이〉 $t\in S_{1/100}(2)$ 이므로 $|t-2|<\dfrac{1}{100}$이다.

$a=5e_1+3e_2-2e_3$이라 하면

$$|x-a|=|(t^2-4)e_1+(t-2)e_2-(t-2)e_3|$$

$$\leqq |t^2-4||e_1|+|t-2||e_2|+|t-2||e_3|$$

$$\leqq |t-2||t+2|+|t-2|+|t-2|$$

$\leqq |t-2|(|t+2|+1+1)=|t-2|(|t-2+2|+2)$

$\leqq |t-2|(|t-2|+4)$, $|t-2|<\dfrac{1}{100}<1$이라고 하면

$|x-a|\leqq |t-2|(|t-2|+4)<5|t-2|<5\times\dfrac{1}{100}=\dfrac{1}{20}<\dfrac{1}{10}$

$|x-a|<\dfrac{1}{10}$이므로 $x\in S_{1/10}(5e_1+3e_2-2e_3)$

2.67 $\lim\limits_{t\to t_0}[f_1(t)e_1+f_2(t)e_2+f_e(t)e_3]=L_1e_1+L_2e_2+L_3e_3$이라 할 때,

$\lim\limits_{t\to t_0}f_i(t)=L_i$, $i=1,2,3$ 임을 보여라.

〈풀이〉 $\lim\limits_{t\to t_0}[f_1(t)e_1+f_2(t)e_2+f_e(t)e_3]=L_1e_1+L_2e_2+L_3e_3$ 이므로

임의의 양수 $\epsilon>0$에 대하여 다음을 만족하는 $\delta>0$가 존재한다.

$|t-t_0|<\delta \Rightarrow |(f_1(t)-L_1)e_1+(f_2(t)-L_2)e_2+(f_3(t)-L_3)e_3|$

$<|(f_1(t)-L_1)e_1|+|(f_2(t)-L_2)e_2|+|(f_3(t)-L_3)e_3|<\epsilon$

$\therefore$ $|t-t_0|<\delta \Rightarrow |f_i(t)-L_i|<|(f_1(t)-L_1)e_1|+|(f_2(t)-L_2)e_2|+|(f_3(t)-L_3)e_3|<\epsilon$

$\therefore$ $\lim\limits_{t\to t_0}f_i(t)=L_i$ $i=1,2,3$ 이다.

2.68 $t\to t_0$일 때 $f(t)\to L$, $g(t)\to M$이라면, $t\to t_0$일 때 $f(t)\cdot g(t)\to L\cdot M$임을 보여라.

〈풀이〉 방법 1) $t\to t_0$일 때 $f(t)\to L$, $g(t)\to M$이므로 $\lim\limits_{t\to t_0}[f(t)-L]=0$, $\lim\limits_{t\to t_0}[g(t)-M]=0$이다.

$f(t)\cdot g(t)=[f(t)-L]\cdot[g(t)-M]+f(t)\cdot M+L\cdot g(t)-L\cdot M$이고

$\lim\limits_{t\to t_0}[f(t)\cdot M]=L\cdot M$, $\lim\limits_{t\to t_0}[L\cdot g(t)]=L\cdot M$이므로

$\lim\limits_{t\to t_0}f(t)\cdot g(t)=\lim\limits_{t\to t_0}\{[f(t)-L]\cdot[g(t)-M]+f(t)\cdot M+L\cdot g(t)-L\cdot M\}$

$=\lim\limits_{t\to t_0}[f(t)-L]\cdot[g(t)-M]+\lim\limits_{t\to t_0}[f(t)\cdot M]+\lim\limits_{t\to t_0}[L\cdot g(t)]-\lim\limits_{t\to t_0}L\cdot M$

$=0+L\cdot M+L\cdot M-L\cdot M=L\cdot M$

방법 2) $f(t)\cdot g(t)-L\cdot M=(f(t)-L)\cdot g(t)+L\cdot(g(t)-M)$ 이므로

$|f(t)\cdot g(t)-L\cdot M|\leqq |f(t)-L|\cdot|g(t)|+|L|\cdot|g(t)-M|$

$t\to t_0$일 때 $g(t)\to M$이므로 적당한 $\delta'>0$이 존재하여,

$0<|t-t_0|<\delta'$일 때 $|g(t)|\leqq K$인 양수 K가 존재한다.

$t\to t_0$일 때 $f(t)\to L$이므로 적당한 $\delta_1>0$ $(\delta_1\leqq\delta')$이 존재하여,

$0<|t-t_0|<\delta_1$일 때 $|f(t)-L|<\dfrac{\epsilon}{2K}$이다.

따라서, $|f(t)-L|\cdot|g(t)|<\dfrac{\epsilon}{2K}\cdot K=\dfrac{\epsilon}{2}\cdots$ ①

i) $L=0$이면 $|L|\cdot|g(t)-M|=0$이므로 임의의 $\epsilon>0$에 대하여

$|L|\cdot|g(t)-M|<\dfrac{\epsilon}{2}$이다.

ii) $L \neq 0$이면 $|L|>0$이므로 적당한 $\delta_2>0$에 대하여

$$0<|t-t_0|<\delta_2 \text{일 때 } |g(t)-M|<\frac{\epsilon}{2|L|}$$

$$\therefore\ |L|\cdot|g(t)-M|<|L|\cdot\frac{\epsilon}{2|L|}=\frac{\epsilon}{2}\cdots\ ②$$

$\therefore\ \delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$라 하면 ①과 ②에 의하여

$$0<|t-t_0|<\delta \Rightarrow |f(t)\cdot g(t)-L\cdot M|<\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon$$

$\therefore\ t\to t_0$일 때 $f(t)\to L,\ g(t)\to M$이라면, $t\to t_0$일 때 $f(t)\cdot g(t)\to L\cdot M$

2.69 $[at^2+o(t^3)]\cdot[bt+o(t^2)]=a\cdot bt^3+o(t^4)$임을 보여라.

〈풀이〉 $[at^2+o(t^3)]\cdot[bt+o(t^2)]=a\cdot bt^3+at^2\cdot o(t^2)+bt\cdot o(t^3)+o(t^3)\cdot o(t^2)$

$o(t^2)=f(t),\ o(t^3)=g(t)$라 하면 $\lim_{t\to t_0}\frac{f(t)}{t^2}=0,\ \lim_{t\to t_0}\frac{g(t)}{t^3}=0$이므로

$$\lim_{t\to t_0}\frac{at^2\cdot o(t^2)+bt\cdot o(t^3)+o(t^3)\cdot o(t^2)}{t^4}$$

$$=\lim_{t\to t_0}\frac{at^2\cdot o(t^2)}{t^4}+\lim_{t\to t_0}\frac{bt\cdot o(t^3)}{t^4}+\lim_{t\to t_0}\frac{o(t^3)\cdot o(t^2)}{t^4}$$

$$=\lim_{t\to t_0}\frac{a\cdot f(t)}{t^2}+\lim_{t\to t_0}\frac{b\cdot g(t)}{t^3}+\lim_{t\to t_0}\frac{f(t)\cdot g(t)}{t^4}$$

$$=\lim_{t\to t_0}\frac{f(t)}{t^2}\cdot a+\lim_{t\to t_0}\frac{g(t)}{t^3}\cdot b+\lim_{t\to t_0}\frac{f(t)}{t^2}\cdot\frac{g(t)}{t^2}$$

$=0\cdot a+0\cdot b+0\cdot M$ (단, M은 0을 포함한 상수이다)

$\therefore \lim_{t\to t_0}\frac{at^2\cdot o(t^2)+bt\cdot o(t^3)+o(t^3)\cdot o(t^2)}{t^4}=0$이므로

$at^2\cdot o(t^2)+bt\cdot o(t^3)+o(t^3)\cdot o(t^2)=o(t^4)$이다.

$\therefore\ [at^2+o(t^3)]\cdot[bt+o(t^2)]=a\cdot bt^3+o(t^4)$

2.70 $g(t)=O(g(t))$임을 보여라.

〈풀이〉 $\lim_{t\to t_0}\frac{g(t)}{g(t)}=\lim_{t\to t_0}\frac{1}{1}=1$이므로 $1<M$인 $M(\neq\infty)$에 대하여

$\lim_{t\to t_0}\frac{g(t)}{g(t)}<M$이므로 $g(t)=O(g(t))$이다.

2.71 $o(g_1(t))\cdot O(g_2(t))=o(g_1(t)g_2(t))$임을 보여라.

〈풀이〉 $f_1(t)=o(g_1(t)),\ f_2(t)=O(g_2(t))$라고 하면

$\lim_{t\to t_0}\frac{f_1(t)}{g_1(t)}=0,\ \lim_{t\to t_0}\frac{f_2(t)}{g_2(t)}=M$이므로 문제 2.68을 이용하면

$\lim_{t\to t_0}\frac{f_1(t)\cdot f_2(t)}{g_1(t)g_2(t)}=\lim_{t\to t_0}\frac{f_1(t)}{g_1(t)}\cdot\frac{f_2(t)}{g_2(t)}=0\cdot M=0$이므로

$$o(g_1(t)) \cdot O(g_2(t)) = f_1(t) \cdot f_2(t) = o(g_1(t)g_2(t))$$

2.72 $O(g_1(t)) \times O(g_2(t)) = O(g_1(t)g_2(t))$

$f_1(t) = O(g_1(t))$, $f_2(t) = O(g_2(t))$라고 하면

$\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{f_1(t)}{g_1(t)} < M_1$, $\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{f_2(t)}{g_2(t)} < M_2$이므로 문제 2.20을 이용하면

$\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{f_1(t) \times f_2(t)}{g_1(t)g_2(t)} = \lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{f_1(t)}{g_1(t)} \times \dfrac{f_2(t)}{g_2(t)} < M_1 \times M_2$이므로

$O(g_1(t)) \times O(g_2(t)) = f_1(t) \times f_2(t) = O(g_1(t)g_2(t))$

2.73 $t \to t_0$일 때 $f(t) \to f(t_0)$이고, $\theta \to \theta_0$일 때 $h(\theta) \to t_0$이라면 $\theta \to \theta_0$일 때 $f(h(\theta)) \to f(t_0)$임을 보여라.

〈풀이〉 $\epsilon > 0$이라고 하면 적당한 $\delta_1 > 0$이 존재하여

$$|t - t_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(t) - f(t_0)| < \epsilon$$

그러면 다음 조건을 만족하는 적당한 $\delta > 0$이 존재한다.

$$|\theta - \theta_0| < \delta \Rightarrow |h(\theta) - t_0| < \delta_1$$

$\therefore$ $|\theta - \theta_0| < \delta \Rightarrow |h(\theta) - t_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(t) - f(t_0)| < \epsilon$

$\therefore$ $t \to t_0$일 때 $f(t) \to f(t_0)$이고, $\theta \to \theta_0$일 때 $h(\theta) \to t_0$이라면

$\theta \to \theta_0$일 때 $f(h(\theta)) \to f(t_0)$이다.

2.74 연쇄법칙을 증명하여라: $u = f(t)$, $t = h(\theta)$가 각각 t와 θ에 관한 미분가능한 함수일 때, $\dfrac{du}{d\theta} = \dfrac{du}{dt}\dfrac{dt}{d\theta}$이다.

〈풀이〉 $\dfrac{du}{d\theta} = \lim\limits_{\theta \to \theta_0} \dfrac{f(h(\theta)) - f(h(\theta_0))}{\theta - \theta_0}$

$$= \lim_{\theta \to \theta_0} \frac{f(h(\theta)) - f(h(\theta_0))}{h(\theta) - h(\theta_0)} \cdot \frac{h(\theta) - h(\theta_0)}{\theta - \theta_0}$$

$t_0 = h(\theta_0)$라 하면

$$\frac{du}{d\theta} = \lim_{\theta \to \theta_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \cdot \lim_{\theta \to \theta_0} \frac{t - t_0}{\theta - \theta_0}$$

$\theta \to \theta_0 \Rightarrow t \to t_0$이므로

$$\frac{du}{d\theta} = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \cdot \lim_{\theta \to \theta_0} \frac{t - t_0}{\theta - \theta_0}$$

$$\therefore \frac{du}{d\theta} = \frac{du}{dt}\frac{dt}{d\theta}$$

제3장

3.25 표현 $x=te_1+(t^2+2)e_2+(t^3+t)e_3$은 모든 t에 관하여 정칙임을 보이고 x_1x_3-평면과 x_1x_2-평면에 내린 정사영을 스케치하여라.

〈풀이〉 $x=x_1(t)+x_2(t)+x_3(t)$이고

$x_1(t)=t,\ x_2(t)=t^2+2,\ x_3(t)=t^3+t$라 하면

$x_1{}'(t)=1,\ x_2{}'(t)=2t,\ x_3{}'(t)=3t^2+1$이므로

x는 모든 t에 대하여 C^1-급이고, $x'(t)\neq 0$이므로 정칙이다.

$x_2(t)=0 \Rightarrow\ x_1(t)=t,\ x_3(t)=t^3+t$

$\Rightarrow x_3=x_{+x_11}^3$: x_1x_3-평면에 내린 정사영

$x_3(t)=0 \Rightarrow\ x_1(t)=t,\ x_3(t)=t^2+2$

$\Rightarrow x_2=x_{+21}^2$: x_1x_2-평면에 내린 정사영

3.26 나사선은 극좌표로 $r=\dfrac{a}{\cos\theta}+c,\ a\neq 0,\ c\neq 0,\ -\pi\leqq\theta\leqq\pi$로 주어진다. 이것을 스케치하고 직각좌표로 표시되는 표현을 구하여라.

〈풀이〉 직각좌표의 표현 :$x_1=r\cos\theta,\ x_2=r\sin\theta$ 이므로

$$x_1=r\cos\theta=\left(\frac{a}{\cos\theta}+c\right)\cos\theta=a+c\cos\theta$$

$$x_2=r\sin\theta=\left(\frac{a}{\cos\theta}+c\right)\sin\theta=a\tan\theta+c\sin\theta$$

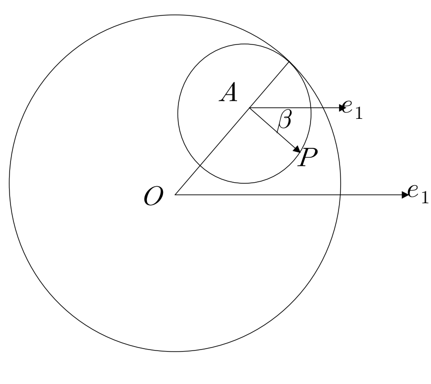
3.27 근호를 포함하지 않는 주면들 $x_3{}^2=x_1,\ x_2{}^2=1-x_1$의 교선의 표현을 구하여라.

〈풀이〉 $x_2{}^2+x_3{}^2=1$이므로

$x_2=\sin\theta,\ x_3=\cos\theta$라 하면

$x_1=\cos^2\theta,\ 0\leqq\theta\leqq 2\pi$

3.28 內擺線(hypocycloid)은 <그림 3-18>에서 보는 것 처럼, 원 C가 고정된 원 C_0의 안쪽을 미끄러지지 않고 구를 때 원 C의 원주상의 점 P가 만나는 평면 곡선이다. 만일 C의 반지름이 r, C_0는 중심이 원점, 반지름이 r_0, 점 P는 최초로 $(r_0, 0)$에 놓여 있을 때, 내파선의 표현을 구하여라.



〈풀이〉 A를 C의 중심이라 하고 θ를 OA와 e_1이 이루는 각이라 하자. 그러면

$OA=|OA|(\cos\theta)e_1+|OA|(\sin\theta)e_2=(r_0-r)(\cos\theta)e_1+(r_0-r)(\sin\theta)e_2$이다.

만일 AP와 e_1이 이루는 각을 β라 하면, 부채꼴의 넓이에 의해서

$r_0\theta=(\theta-\beta)r \Rightarrow \beta=\dfrac{r-r_0}{r}\theta$

이것을 대입하면

$AP=|AP|(\cos\beta)e_1+|AP|(\sin\beta)e_2$

$=r\cos\left(\dfrac{r-r_0}{r}\theta\right)e_1+r\sin\left(\dfrac{r-r_0}{r}\theta\right)e_1$

$\therefore\ x=OP=OA+AP$

$=\left[(r_0-r)\cos\theta+r\cos\left(\dfrac{r_0-r}{r}\theta\right)\right]e_1+\left[(r_0-r)\sin\theta-r\sin\left(\dfrac{r_0-r}{r}\theta\right)\right]e_2$

3.29 만일 앞 문제에서 $r_0=5$, $r=2$일 때, 내파선의 방정식은

$x_1=3\cos\theta+2\cos\dfrac{3\theta}{2}$, $x_2=3\sin\theta+2\sin\dfrac{3\theta}{2}$

이다. 특이점을 구하고 스케치하여라.

〈풀이〉 $\dfrac{dx_1}{d\theta}=-3\sin\theta-3\sin\dfrac{3\theta}{2}$, $\dfrac{dx_2}{d\theta}=3\cos\theta+3\cos\dfrac{3\theta}{2}$

$\dfrac{dx_1}{d\theta}=0$, $\dfrac{dx_2}{d\theta}=0$ 을 만족하는 θ가 특이점이므로

$\sin\theta=-\sin\dfrac{3\theta}{2}$, $\cos\theta=-\cos\dfrac{3\theta}{2}$

$\sin\theta=-\sin(2n\pi-\theta)$이므로 $2n\pi-\theta=\dfrac{3\theta}{2}\Rightarrow\theta=\left(\dfrac{4}{5}\right)n\pi$

$\sin\theta=-\sin\{(2n+1)\pi+\theta\}$이므로 $(2n+1)\pi+\theta=\dfrac{3}{2}\theta\Rightarrow\theta=\theta=2(2n+1)\pi$

$\cos\theta=\cos(2n\pi-\theta)$이므로 $2n\pi-\theta=\dfrac{3\theta}{2}\Rightarrow\theta=\left(\dfrac{4}{5}\right)n\pi$

$\cos\theta=\cos(2n\pi+\theta)\Rightarrow\ 2n\pi+\theta=\dfrac{3}{2}\theta\Rightarrow\theta=4n\pi$

$\therefore$ 특이점은 $\theta=\left(\dfrac{4}{5}\right)n\pi$, $n=0,\ \pm1,\ \cdots$

3.30 $\theta=3t^5+10t^3+15t+1$은 모든 t에 대하여 매개변수교환가능임을 보여라.

〈풀이〉 $\dfrac{d\theta}{dt}=15t^4+30t^2+15=15(t^2+1)^2\neq0$이므로

θ는 모든 t에 대하여 C^1−급이고, $\dfrac{d\theta}{dt}\neq0$이므로 매개변수교환가능이다.

3.31 구간 $0<t\leqq2$를 $-\infty<\theta\leqq0$위에로 사상하는 매개변수교환가능을 구하여라.

〈풀이〉 $t=2\ \Rightarrow\ \theta=0$, $t=0\Rightarrow\theta=-\infty$인 함수를 생각하면 된다

$\theta=-\dfrac{t-2}{t}$는 구간 $0<t\leqq2$를$-\infty<\theta\leqq0$위에로 사상하는 하나의 매개변수교환가능이다.

3.32 호 $x = e^t(\cos t)e_1 + e^t(\sin t)e_2 + e^t e_3,\ 0 \leqq t \leqq \pi$의 길이를 구하여라.

〈풀이〉 $s = \int_0^\pi \left|\frac{dx}{dt}\right| dt$

$$\left|\frac{dx}{dt}\right| = |(e^t\cos t - e^t\sin t)e_1 + (e^t\sin t + e^t\cos t)e_2 + e^t e_3|$$

$$= \sqrt{e^{2t}\cos^2 t - 2e^{2t}\cos t\sin t + e^{2t}\sin^2 t + e^{2t}\sin^2 t + 2e^{2t}\cos t\sin t + 2e^{2t}\cos^2 t + e^{2t}}$$

$$= e^t\sqrt{2\cos^2 t + 2\sin^2 t + 1} = e^t\sqrt{3}$$

$$\therefore\ s = \int_0^\pi \left|\frac{dx}{dt}\right| dt = \sqrt{3}\int_0^\pi e^t dt = \sqrt{3}(e^\pi - 1)$$

3.33 문제 3.28에서의 내파선을 따라서 θ의 함수로서 호장을 구하여라.

〈풀이〉 $\frac{dx_1}{d\theta} = -(r_0 - r)\sin\theta - (r_0 - r)\sin\left(\frac{r_0 - r}{r}\theta\right)$

$$\frac{dx_2}{d\theta} = (r_0 - r)\cos\theta + (r_0 - r)\cos\left(\frac{r_0 - r}{r}\theta\right)$$

$$\left(\frac{dx_1}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{d\theta}\right)^2 = (r_0 - r)^2\left\{\sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \sin^2\left(\frac{r_0 - r}{r}\right)\right.$$

$$\left. + \cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\left(\frac{r_0 - r}{r}\right)\right\}$$

$$= (r_0 - r)^2\left\{2 - 2\left[\cos\theta\cos\left(\frac{r_0 - r}{r}\theta\right) - \sin\theta\sin\left(\frac{r_0 - r}{r}\theta\right)\right]\right\}$$

$$= (r_0 - r)^2\left\{2 - 2\cos\left(\frac{r_0 - r}{r}\theta + \theta\right)\right\} = (r_0 - r)^2\left\{2 - 2\cos\left(\frac{r_0}{r}\theta\right)\right\}$$

$$s = \int_0^\theta \left|\frac{dx}{d\theta}\right| d\theta = \int_0^\theta (r_0 - r)\left\{2 - 2\cos\left(\frac{r_0}{r}\theta\right)\right\}^{1/2} d\theta$$

$$= 2(r_0 - r)\int_0^\theta \sin\frac{r_0\theta}{2r} d\theta \qquad \left(\Leftarrow 2\sin^2\frac{\theta}{2} = 1 - \cos\theta\right)$$

$$= -\frac{4r(r_0 - r)}{r_0}\left[\cos\frac{r_0\theta}{2r}\right]_0^\theta = \frac{4r(r_0 - r)}{r_0}\left\{1 - \cos\left(\frac{r_0\theta}{2r}\right)\right\}$$

3.34 $x = te_1 + (\sin t)e_2 + e^t e_3,\ -\infty < t < \infty$와 $x = (\log t)e_1 + \sin(\log t)e_2 + te_3,\ 0 < t < \infty$는 같은 유향곡선의 표현임을 보여라.

〈풀이〉 $t = t(\theta) = \log\theta$는 I_θ에서 $I_t = t(I_\theta)$ 위에로의 1-1 사상이므로

x는 매개변수교환가능이므로

$x = te_1 + (\sin t)e_2 + e^t e_3,\ -\infty < t < \infty$와 $x = (\log t)e_1 + \sin(\log t)e_2 + te_3,\ 0 < t < \infty$는

같은 유향곡선의 표현이다.

3.35 한 유향정칙호는 다음 네 구간 중 어느 하나 위에서 정의되는 표현임을 보여라.

(i) $0 \leqq t \leqq 1$ (ii) $0 < t < 1$ (iii) $0 \leqq t < 1$ (iv) $0 < t \leqq 1$

〈풀이〉 연습문제 3.12(93~94p)에서 (i), (ii), (iii)의 경우를 증명하였으므로 (iv)만 증명한다.

[예제 3.5]에서 본 것처럼 일차함수 $t=\dfrac{(\theta-a)}{(b-a)}$는

$a<\theta \leqq b$에서 $0<t \leqq 1$위에로 취하는 매개변수교환가능이다.

함수 $\theta=\mathrm{Tan}^{-1}s$는 $-\infty<s<b$에서 $-\dfrac{\pi}{2}<\theta \leqq \mathrm{Tan}^{-1}b$위에로

$t=\left\{\theta-\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right\}\Big/\left\{\mathrm{Tan}^{-1}b-\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right\}$는

$-\dfrac{\pi}{2}<\theta \leqq \mathrm{Tan}^{-1}b$ 위에서 $0<t \leqq 1$ 위에로 값을 취한다.

따라서 합성함수 $t=\dfrac{\mathrm{Tan}^{-1}s-\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)}{\mathrm{Tan}^{-1}b-\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)}$는

$-\dfrac{\pi}{2}<\theta \leqq \mathrm{Tan}^{-1}b$ 위에서 $0<t \leqq 1$ 위에로 값을 취한다.

3.36 두 개의 정칙표현 I_t위의 $x=x(t)$와 I_θ위의 $x=x^*(\theta)$는, 그들이 같은 유향곡선을 나타낼 때, 즉 $\dfrac{dt}{d\theta}>0,\ t(I_\theta)=I_t,\ x(t(\theta))=x^*(\theta)$를 만족하는 매개변수교환가능 $t=t(\theta)$가 존재할 때, 서로 동치라고 가정하자. 이것은 정칙표현들의 집합 위에서 동치관계임을 보여라. 따라서, 정칙유향곡선을 양의 도함수를 갖는 매개변수교환가능에 의하여 연관되어 있는 정칙표현들의 동치류이다.

〈풀이〉 (i) Reflexive

$x=x(t)$는 매개변수 항등교환$t=t(\theta)=\theta$에 의하여

$\dfrac{dt}{d\theta}=1>0, t(I_\theta)=I_{\theta,}\ x(t)=x(t(\theta))=x(\theta)$을 만족하므로 자신과 동치이다.

(ii) Symmetric

두 개의 정칙표현 I_t위의 $x=x(t)$와 I_θ위의 $x=x^*(\theta)$가 그들이 같은 유향곡선을 나타낸다고 하면 $\dfrac{dt}{d\theta}>0,\ t(I_\theta)=I_t,\ x(t(\theta))=x^*(\theta)$이므로

$x=x^*(\theta)$는 $\theta(I_t)=I_\theta$이고 $x^*(\theta(t))=x(t(\theta(t)))=x(t)$이고,

$\dfrac{d\theta}{dt}=\dfrac{1}{\dfrac{d\theta}{dt}}>0$ 이므로 역함수 $\theta=\theta(t)$밑에서 동치이다.

(iii) Transtive

$x=x^*(t)$가 $t=t(\theta)$밑에서 $x=x^*(\theta)$와 동치이고

$x=x^*(\theta)$가 $\theta=\theta(\phi)$밑에서 $x=x^{**}(\phi)$와 동치라면,

합성함수 $t=t(\theta(\phi))$를 생각하면

$\dfrac{dt}{d\phi}=\dfrac{dt}{d\theta}\dfrac{d\theta}{d\phi}>0,\ t(\theta(I_\phi))=t(I_\theta)=I_t$이고

$x(t(\theta(\phi)))=x^*(\theta(\phi))=x^{**}(\phi)$이므로

$x=x(t)$는 $x=x^{**}(\phi)$와 동치이다.

3.37 I위의 길이가 유한한 호 $x=x(t)$의 I^*위에서의 호선분 $x=x(t)$는 또한 길이가 유한함을 보여라.

〈풀이〉 $I=[a,b]$, $I^*=[c,d]$라 하면 $a \leqq c$, $d \leqq b$

I위에서의 $x=x(t)$의 길이를 s라 하면

$$s=\int_a^b \left|\frac{dx}{dt}\right| dt \leqq M$$ ($\because$ 길이가 유한이므로) 인 M이 존재한다.

$\therefore$ I^*위에서의 $x=x(t)$의 길이를 s^*이라 하면

$$s^*=\int_c^d \left|\frac{dx}{dt}\right| dt \leqq \int_a^b \left|\frac{dx}{dt}\right| dt \leqq M$$ 이므로 길이가 유한이다.

3.38 만일 $a \leqq t \leqq b$위의 $x=x(t)$는 길이가 s이고 $a<t_0<b$인 길이가 유한한 호라면, $a \leqq t \leqq t_0$위의 호선분 $x=x(t)$와 $t_0 \leqq t \leqq b$위의 호선분 $x=x(t)$는 둘 다 길이가 유한한 호로서 각각 길이가 s_1, s_2이고 $s=s_1+s_2$임을 보여라.

〈풀이〉 조건에 의하여 $s=\int_a^b \left|\frac{dx}{dt}\right| dt$ 이다.

$$s_1=\int_a^{t_0} \left|\frac{dx}{dt}\right| dt \ , \ s_2=\int_{t_0}^b \left|\frac{dx}{dt}\right| dt$$: 유한(문제 3.37에서 증명)이므로

$$s_1+s_2=\int_a^{t_0} \left|\frac{dx}{dt}\right| dt+\int_{t_0}^b \left|\frac{dx}{dt}\right| dt=\int_a^b \left|\frac{dx}{dt}\right| dt=s$$ 이다.

3.39 [정리 3.4] (iii)를 증명하여라 : 만일 $x=x(s)$가 유향곡선 C의 자연표현이고 $x=x^*(t)$가 C의 다른 표현이라면, $\frac{ds}{dt}=\left|\frac{dx}{dt}\right|$이다.

〈풀이〉 $s=s(t)$라고 하면 $\frac{dx}{dt}=\frac{dx}{ds}\frac{ds}{dt} \Rightarrow \left|\frac{dx}{dt}\right|=\left|\frac{dx}{ds}\right|\left|\frac{ds}{dt}\right|$

$\left|\frac{dx}{ds}\right|=1$ 이므로 $\left|\frac{dx}{dt}\right|=\left|\frac{ds}{dt}\right|$

$x=x(s)$와 $x=x^*(t)$는 같은 방향을 가지므로 $\frac{ds}{dt}>0$이다. (80p)

$\therefore \frac{ds}{dt}=\left|\frac{dx}{dt}\right|$

제4장

4.26 x_1x_2-평면과 $t=\dfrac{\pi}{2}$에서 곡선 $x=(\cos t)e_1+(\sin t)e_2+te_3$의 법평면과의 교선을 구하여라.

〈풀이〉 $x'=(-\sin t)e_1+(\cos t)e_2+e_3$

$$x\left(\frac{\pi}{2}\right)=e_2+\frac{\pi}{2}e_3,\ x'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-e_1+e_3$$

법평면의 방정식은 $\left\{y-x\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right\}\cdot x'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$ 이므로

$$\left(x_1,x_2-1,x_3-\frac{\pi}{2}\right)\cdot(-1,0,1)=0$$

$$\Rightarrow -x_1+0+x_3-\frac{\pi}{2}=0\ \cdots\ ①$$

x_1x_2평면과의 교점은 $x_3=0$이므로 ①에 대입하면

$x_1=-\dfrac{\pi}{2},\ x_2=k,\ x_3=0$ (단, $-\infty<k<\infty$)이다.

4.27 x_1x_2-평면과 $t=1$에서 곡선 $x=(1+t)e_1-t^2e_2+(1+t^3)e_3$의 접선과의 교점을 구하여라.

$x'(t)=e_1-2te_2+3t^2e_3$이므로

$x(1)=2e_1-e_2+2e_3,\ x'(1)=e_1-2e_2+3e_3$

접선의 방정식은 $y=x(1)+kx'(1)$이므로

$y=(2+k,-1-2k,2+3k)\ \cdots\ ①$ (단, k는 상수)

x_1x_2-평면과 만나는 점은 $x_3=0$이므로

$2+3k=0 \Rightarrow k=-\dfrac{2}{3}$을 ①에 대입하면

$$y=\left(\frac{4}{3},\frac{1}{3},0\right)$$

4.28 모든 접선이 평행한 곡선은 직선임을 보여라.

모든 접선이 평행하므로 112p 세 가지 접선의 공식을 사용하면

t와 n은 서로 평행하고, t와 b는 서로 평행하다.

$\therefore |x'\times x''|=0$ 이므로 $|\kappa|=0$

$\therefore$ 정리 4.1(106p)에 의하여 직선이다.

4.29 $\Delta\theta$를 두 단위접선 $t(s+\Delta\theta)$와 $t(s)$, $\Delta s>0$ 사이의 각이라 할 때, $\lim\limits_{\Delta s\to 0}\Delta\theta=0$임을 보여라.

연습문제 4.9(120p)에 의하여 $|t(s+\Delta s)-t(s)|=2\sin\left(\dfrac{1}{2}\Delta\theta\right)=\Delta\theta+o(\Delta\theta)$ 이므로

$$\lim_{\Delta s\to 0}\Delta\theta=\lim_{\Delta s\to 0}|t(s+\Delta s)-t(s)|=0$$

4.30 평면곡선 $x=x_1(t)e_1+x_2(t)e_2$를 따라서 곡률은 $|\kappa|=\dfrac{|x_1{}'x_2{}''-x_2{}'x_1{}''|}{[(x_1{}')^2+(x_2{}')^2]}$임을 보여라.

〈풀이〉 $x'=x_1{}'(t)e_1+x_2{}'(t)e_2 \Rightarrow |x'|^3=[(x_1{}')^2+(x_2{}')^2]^{3/2}$

$x''=x_1{}''(t)e_1+x_2{}''(t)e_2$ 이므로

$$x'\times x''=\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1{}' & x_2{}' & 0 \\ x_1{}'' & x_2{}'' & 0 \end{vmatrix}=(x_1{}'x_2{}''-x_2{}'x_1{}'')e_3$$

$$\Rightarrow |x'\times x''|=|x_1{}'x_2{}''-x_2{}'x_1{}''|$$

정리 4.2에 의하여 $|\kappa|=\dfrac{|x'\times x''|}{|x'|^3}$이므로

$$|\kappa|=\frac{|x_1{}'x_2{}''-x_2{}'x_1{}''|}{[(x_1{}')^2+(x_2{}')^2]}$$

* 정의에 의한 풀이

$$\frac{dx}{dt}=(x_1{}',x_2{}'),\quad \frac{ds}{dt}=\left|\frac{dx}{dt}\right|=[(x_1{}')^2+(x_2{}')^2]^{1/2}$$

$$\therefore\ t=\frac{dx}{ds}=\frac{dx}{dt}\frac{dt}{ds}=\left(\frac{x_1{}'}{[(x_1{}')^2+(x_2{}')^2]^{1/2}},\frac{x_2{}'}{[(x_1{}')^2+(x_2{}')^2]^{1/2}}\right)$$

θ만큼 회전이동한 식은 $\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$이므로

90^o만큼 회전이동한 식은 $X'=-Y,\ Y'=X$이므로

$$\therefore\ n=\left(\frac{-x_2{}'}{[(x_1{}')^2+(x_2{}')^2]^{1/2}},\frac{x_1{}'}{[(x_1{}')^2+(x_2{}')^2]^{1/2}}\right)\text{이다.}$$

그리고 $$\frac{dt}{ds}=\left(\frac{-(x_1{}'x_2{}''-x_1{}''x_2{}')x_2{}'}{[(x_1{}')^2+(x_2{}')^2]^{3/2}},\frac{(x_1{}'x_2{}''-x_1{}''x_2{}')x_1{}'}{[(x_1{}')^2+(x_2{}')^2]^{3/2}}\right)\cdot\frac{1}{[(x_1{}')^2+(x_2{}')^2]^{1/2}}$$

$$=\left\{\frac{x_1{}'x_2{}''-x_1{}''x_2{}'}{[(x_1{}')^2+(x_2{}')^2]^{3/2}}\right\}\left(\frac{-x_2{}'}{[(x_1{}')^2+(x_2{}')^2]^{1/2}},\frac{x_1{}'}{[(x_1{}')^2+(x_2{}')^2]^{1/2}}\right)$$

이므로 $\dot{t}=\kappa n$에 적용하면

$$\kappa=\frac{x_1{}'x_2{}''-x_1{}''x_2{}'}{[(x_1{}')^2+(x_2{}')^2]^{3/2}}\Rightarrow|\kappa|=\frac{|x_1{}'x_2{}''-x_1{}''x_2{}'|}{[(x_1{}')^2+(x_2{}')^2]^{3/2}}\text{이다.}$$

4.31 모든 t에 대하여 x'와 x''가 일차종속이라면 그 곡선은 직선임을 보여라.

〈풀이〉 x'와 x''가 일차종속이라면 서로 평행이므로 $x'\times x''=0$이다.

$\therefore\ |\kappa|=\dfrac{|x'\times x''|}{|x'|^3}=0$ 이므로 정리 4.1에 의하여(106p) 곡선은 직선이다.

4.32 곡선 $(t-\sin t)e_1+(1-\cos t)e_2+te_3$을 따라서 곡률을 구하여라.

〈풀이〉 $x'=(1-\cos t)e_1+(\sin t)e_2+e_3,\ x''=(\sin t)e_1+(\cos t)e_2$

$$|x'|^3=(1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t+1)^{3/2}=(3-2\cos t)^{3/2}$$
$$=\left\{3-2\left(1-2\sin^2\frac{t}{2}\right)\right\}^{3/2}=\left(1+4\sin^2\frac{t}{2}\right)^{3/2}\cdots \ ①$$

$$x'\times x''=\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1-\cos t & \sin t & 1 \\ \sin t & \cos t & 0 \end{vmatrix}$$
$$=-(\cos t)e_1+(\sin t)e_2+\{(1-\cos t)\cos t-\sin^2 t\}e_3$$
$$=-(\cos t)e_1+(\sin t)e_2+(\cos t-1)e_3=-(\cos t)e_1+(\sin t)e_2-\left(2\sin^2\frac{t}{2}\right)e_3$$

$$\therefore\ |x'\times x''|=\left(1+4\sin^4\frac{t}{2}\right)^{1/2}\cdots \ ②$$

정리 4.2에 의하여 $|\kappa|=\dfrac{|x'\times x''|}{|x'|^3}$이므로

$$|\kappa|=\frac{\left(1+4\sin^4\frac{t}{2}\right)^{1/2}}{\left(1+4\sin^2\frac{t}{2}\right)^{3/2}}$$ 이다.

4.33 곡선 $(t-\sin t)e_1+(1-\cos t)e_2+te_3$을 따라서 곡률을 구하여라. 보충문제 4.32번을 계속 사용한다.

$x'''=(\cos t)e_1-(\sin t)e_2$이므로

$[x'\,x''\,x''']=\begin{vmatrix} 1-\cos t & \sin t & 1 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ \cos t & -\sin t & 0 \end{vmatrix}=-1$이므로 정리 4.5에 의하여(116p)

$$\tau=-\frac{1}{1+4\sin^2\frac{t}{2}}$$

4.34. $\kappa\tau=|\dot{t}\cdot\dot{b}|$임을 보여라.

〈풀이〉 $\dot{t}=\kappa n,\ \dot{b}=-\tau n$ 이므로, $\dot{t}\cdot\dot{b}=(\kappa n)\cdot(-\tau n)=-\kappa\tau n\cdot n=-\kappa\tau$

$\therefore\ |\dot{t}\cdot\dot{b}|=\kappa\tau$

4.35. 곡선 $x=te_1+\dfrac{1+t}{t}e_2+\dfrac{1-t^2}{t}e_3$은 평면 위에 놓여 있음을 보여라.

〈풀이〉 $x=(t,1+t^{-1},-t+t^{-1})$

$x'=(1,-t^{-2},-1-t^{-2})$

$x''=(0,2t^{-3},2t^{-3})$

$x'''=(0,-6t^{-4},-6t^{-4})$

$[x'\,x''\,x''']=\begin{vmatrix} 1 & -t^{-2} & -1-t^{-2} \\ 0 & 2t^{-3} & 2t^{-3} \\ 0 & -6t^{-4} & -6t^{-4} \end{vmatrix}=0$ 이므로 정리 4.5에 의하여

$\tau=0$이고 정리 4.4에 의하여 x는 평면 위에 놓여 있다.

4.36 곡선 $x = a(\cos t)e_1 + a(\sin t)e_2 + f(t)e_3$이 평면곡선이 되도록 하는 가장 일반적인 함수 $f(t)$를 구하여라.

〈풀이〉 $x' = (-a\sin t, a\cos t, f'(t))$

$x'' = (-a\cos t, -a\sin t, f''(t))$

$x''' = (a\sin t, -a\cos t, f'''(t))$

$$[x'\,x''\,x'''] = \begin{vmatrix} -a\sin t & a\cos t & f'(t) \\ -a\cos t & -a\sin t & f''(t) \\ a\sin t & -a\cos t & f'''(t) \end{vmatrix} = 0$$

1행과 3행을 비교하면 $f'(t) + f'''(t) = 0$ 이므로

$y + y^3 = 0 \Rightarrow y(y^2+1) = 0$ 이므로 $y = 0$ 또는 $y = i$

$\therefore f'(t) = c_1\cos t + c_2\sin t$ 이므로

$f(t) = A\sin t + B\cos t + C$ 단, A, B, C는 상수

4.37 곡선 $x = te_1 + \frac{1}{2}t^2e_2 + \frac{1}{3}t^3e_3$위에 어떤 세 점에서의 접촉평면들은 이 세점에 의하여 결정되는 평면 위에 놓여 있는 한 점에서 만남을 보여라.

〈풀이〉 $x' = e_1 + te_2 + t^2e_3,\ x'' = e_2 + 2te_3$ 이므로 접촉평면은

$$\begin{vmatrix} x_1 - t & x_2 - \frac{1}{2}t^2 & x_3 - \frac{1}{3}t^3 \\ 1 & t & t^2 \\ 0 & 1 & 2t \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow t^2x_1 - 2tx_2 + x_3 = \frac{1}{3}t^3$$

이 접촉평면은 곡선위의 어떠한 세 점에서도 서로 평행이 아니므로($\because$ x_3의 계수가 t에 의해서 결정되지 않는 값 1이므로) 세 접촉평면은 세 점이 이루는 평면위의 한 점에서 만난다.

4.38 $x = x(t)$가 평면곡선이기 위한 필요충분조건은 $[x'\,x''\,x'''] = 0$임을 보여라.

〈풀이〉 $\Rightarrow$) 정리 4.4에 의하여 $x = x(t)$가 평면곡선이면 $\tau = 0$이어야 한다.

정리 4.5에 의하여 $\tau = \dfrac{[x'\,x''\,x''']}{|x' \times x''|^2} = 0$ 이므로$[x'\,x''\,x'''] = 0$이다.

$\Leftarrow$) $[x'\,x''\,x'''] = 0 \Rightarrow \dfrac{[x'\,x''\,x''']}{|x' \times x''|^2} = \tau = 0$ 이므로 정리 4.4에 의하여

$x = x(t)$는 평면곡선이다.

4.39 [정리 4.4]의 역을 증명하여라.

〈풀이〉 $x = x(s)$가 평면곡선이라면 $\tau \equiv 0$이다.

$x = x(s)$가 평면곡선이므로 $b = 0$이다.$\Rightarrow \dot{b} = -\tau n = 0$

$n \neq 0$이므로 $\tau \equiv 0$이다.

4.40 곡선이 일반나선이 되기 위한 필요충분조건은 접선구면곡선이 원임을 보여라.

〈풀이〉 문제 4.6에 의하여 일반나선을 그의 축에 수직인 평면 위에 내린 정사영의 곡률 $|\kappa^*|$는 $|\kappa^*| = |\kappa|/\sin^2\alpha$로 주어지므로 $|\kappa| = |\kappa^*|\sin^2\alpha$. $\sin^2\alpha =$상수이므로 $|\kappa| =$상수이므로 곡률반경 $\rho = 1/|\kappa| = 1/|\kappa^*|\sin^2\alpha =$상수로 일정 접선구면곡선 $x_1 = t(s)$에서 $\dfrac{dx_1}{ds} = \dot{t}(s) = \kappa(s)n(s)$이

므로 접선구면곡선의 곡률반경은 $\rho = 1/|\kappa| = 1/|\kappa^*|\sin^2\alpha$ =상수로 일정하다. 그러므로 접선구면곡선은 원이다.

4.41 곡선 C의 접선구면곡선의 접선은 그 대응점에서 종법선구면곡선의 접선과 평행함을 보여라.

〈풀이〉 $x_1 = t(s)$를 $x = x(s)$의 접선구면곡선이라 하면, $x_1 = t(s)$의 접선벡터는

$$\frac{dx_1}{ds} = \dot{t}(s) = \kappa(s)n(s) \cdots \text{①}$$

$x_3 = b(s)$를 $x = x(s)$의 종접선구면곡선이라 하면, $x_3 = b(s)$의 접선벡터는

$$\frac{dx_3}{ds} = \dot{b}(s) = -\tau(s)n(s) \cdots \text{②}$$

①, ②에 의하여 곡선 C의 접선구면곡선의 접선은 그 대응점에서 종법선구면곡선의 접선과 평행하다.

4.42 종법선구면곡선을 따라서 곡률은 $\kappa_3^2 = \dfrac{(\kappa^2 + \tau^2)}{\tau^2}$ 임을 보여라.

$\dot{b} = -\tau n$, $\ddot{b} = \dot{\tau}n + \tau^2 b - \kappa\tau t$ 이므로 $\dot{b}\times\ddot{b} = \tau^2(\tau t + \kappa b)$ (연습문제 4.25에서 증명)

$$\Rightarrow |\dot{b}\times\ddot{b}| = |\tau^2(\tau t + \kappa b)|, \quad |\dot{b}| = \tau$$

$$|\kappa_3| = \frac{|\dot{b}\times\ddot{b}|}{|\dot{b}|^3} = \frac{|\tau t + \kappa b|}{\tau}$$

$$\therefore \kappa_3^2 = \frac{(\kappa^2 + \tau^2)}{\tau^2}$$

4.43 접선구면곡선을 따라서 열률은 $\tau_1 = \dfrac{\tau\dot{\kappa} - \kappa\dot{\tau}}{\kappa(\kappa^2 + \tau^2)}$ 임을 보여라.

〈풀이〉 연습문제 4.18에 의하여 $\dot{t}\times\ddot{t} = \kappa^3 b + \tau\kappa^2 t$

$$|\dot{t}\times\ddot{t}|^2 = \kappa^4(\kappa^2 + \tau^2)$$

$$\dot{t}\times t^{(3)} = \frac{d}{ds}(\dot{t}\times\ddot{t}) = \frac{d}{ds}(\kappa^2(\kappa b + \tau t))$$

$$= 2\kappa\dot{\kappa}(\kappa b + \tau t) + \kappa^2(\dot{\kappa}b + \kappa\dot{b} + \dot{\tau}t + \tau\dot{t})$$

$$= 2\kappa\dot{\kappa}(\kappa b + \tau t) + \kappa^2(\dot{\kappa}b - \kappa\tau n + \dot{\tau}t + \kappa\tau n) = 3\kappa^2\dot{\kappa}b + 2\kappa\dot{\kappa}\tau t + \kappa^2\dot{\tau}t$$

$$\therefore\ [\dot{t}\ \ddot{t}\ t^{(3)}] = -\ddot{t}\cdot(\dot{t}\times t^{(3)}) = (\kappa^2 t - \dot{\kappa}n - \tau\kappa b)(3\kappa^2\dot{\kappa}b + 2\kappa\dot{\kappa}\tau t + \kappa^2\dot{\tau}t) = \kappa^4\dot{\tau} - \kappa^3\dot{\kappa}\tau$$

$$\therefore\ \tau_1 = \frac{[\dot{t}\ \ddot{t}\ t^{(3)}]}{|\dot{t}\times\ddot{t}|^2} = \frac{\kappa^3(\kappa\dot{\tau} - \dot{\kappa}\tau)}{\kappa^4(\kappa^2 + \tau^2)} = \frac{\tau\dot{\kappa} - \kappa\dot{\tau}}{\kappa(\kappa^2 + \tau^2)}$$

제5장

5.25 곡선 $x = e^t[a(\cos t)e_1 + a(\sin t)e_2 + be_3]$의 자연방정식을 구하여라.

〈풀이〉 $x' = e^t[a(\cos t - \sin t)e_1 + a(\sin t + \cos t)e_2 + be_3]$

$$\Rightarrow |x'| = e^t\sqrt{a^2(1-2\sin t\cos t) + a^2(1+2\sin t\cos t) + b^2}$$

$$= e^t\sqrt{2a^2+b^2}$$

$$x'' = e^t[-2a\sin t e_1 + 2a\cos t e_2 + be_3]$$

$$\Rightarrow x' \times x'' = e^{2t}\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a(\cos t - \sin t) & a(\sin t + \cos t) & b \\ -2a\sin t & 2a\cos t & b \end{vmatrix}$$

$$= e^{2t}[ab(\sin t - \cos t)e_1 - ab(\cos t + \sin t)e_2 + 2a^2 e_3]$$

$$|x' \times x''| = e^{2t}\sqrt{a^2b^2(1-2\sin t\cos t) + a^2b^2(1+2\sin t\cos t) + 4a^4}$$

$$= e^{2t}\sqrt{2a^2b^2+4a^4} = \sqrt{2}\,ae^{2t}\sqrt{2a^2+b^2}$$

$$\therefore\ \kappa = \frac{|x' \times x''|}{|x'|^3} = \frac{\sqrt{2}\,ae^{2t}\sqrt{2a^2+b^2}}{e^{3t}(\sqrt{2a^2+b^2})^3} = \frac{\sqrt{2}\,a}{e^t(2a^2+b^2)}$$

$$s = \int_{-\infty}^{t}|x'|dt = \int_{-\infty}^{t}\sqrt{2a^2+b^2}\,dt = \sqrt{2a^2+b^2}\,e^t$$ 이므로

$$\kappa = \frac{\sqrt{2}\,a}{s\sqrt{2a^2+b^2}}$$

$$x''' = e^{2t}[-2a(\sin t + \cos t)e_1 + 2a(\cos t - \sin t)e_2 + be_3]$$

$$\Rightarrow [x'\ x''\ x'''] = e^{3t}\begin{vmatrix} a(\cos t - \sin t) & a(\sin t + \cos t) & b \\ -2a\sin t & 2a\cos t & b \\ -2a(\sin t + \cos t) & 2a(\cos t - \sin t) & b \end{vmatrix}$$

$$= e^{3t}\begin{vmatrix} a(\cos t + \sin t) & a(\sin t - \cos t) & 0 \\ -2a\sin t & 2a\cos t & b \\ 2a\cos t & 2a\sin t & 0 \end{vmatrix} = 2a^2be^{3t}$$

$$\therefore\ \tau = \frac{[x'\ x''\ x''']}{|x' \times x''|^2} = \frac{2a^2be^{3t}}{2a^2e^{4t}(2a^2+b^2)} = \frac{b}{e^t(2a^2+b^2)} = \frac{b}{s\sqrt{2a^2+b^2}}$$

5.26 내파선 $x = \left[(r_0 - r_1)\cos\theta + r_1\cos\left(\frac{r_0 - r_1}{r_1}\right)\theta\right]e_1 + \left[(r_0 - r_1)\sin\theta + r_1\sin\left(\frac{r_0 - r_1}{r_1}\right)\theta\right]e_2$의 자연방정식을 구하여라.

〈풀이〉 $x' = \dfrac{dx}{d\theta} = \left[-(r_0 - r_1)\sin\theta - (r_0 - r_1)\sin\left(\dfrac{r_0 - r_1}{r_1}\right)\right]e_1$

$$+\left[(r_0 - r_1)\cos\theta - (r_0 - r_1)\cos\left(\frac{r_0 - r_1}{r_1}\right)\right]e_2$$

$$= (r_0 - r_1)\left[\left\{-\sin\theta - \sin\left(\frac{r_0 - r_1}{r_1}\right)e_1\right\} + \left\{\cos\theta - \cos\left(\frac{r_0 - r_1}{r_1}\right)\right\}e_2\right]$$

$$x'' = (r_0 - r_1)\left[-\cos\theta - \frac{r_0 - r_1}{r_1}cos\left(\frac{r_0 - r_1}{r_1}\right)\right]e_1$$
$$+ (r_0 - r_1)\left[-\sin\theta + \frac{r_0 - r_1}{r_1}sin\left(\frac{r_0 - r_1}{r_1}\right)\right]e_2$$

계산 편의상 $\frac{r_0 - r_1}{r_1} = A$로 치환

$$x' \times x'' = (r_0 - r_1)^2 \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -\sin\theta - \sin A\theta & \cos\theta - \cos A\theta & 0 \\ -\cos\theta - A\cos A\theta & -\sin\theta + A\sin A\theta & 0 \end{vmatrix}$$
$$= (r_0 - r_1)^2(1 - A)\{1 - (\cos\theta\cos A\theta - \sin\theta\sin A\theta)\}$$
$$= (r_0 - r_1)^2(1 - A)\{1 - \cos(1 + A)\theta\}$$
$$= (r_0 - r_1)^2\left(\frac{r_0 + 2r_1}{r_1}\right)\left(1 - \cos\frac{r_0}{r_1}\theta\right) \text{ 이므로}$$

$$(x' \times x'') \cdot (x' \times x'') = \frac{(r_0 - r_1)^4 (r_0 + 2r_1)^2}{r^2_{1\left(1 - \cos\frac{r_0}{r_1}\theta\right)^2}}$$

$$x' \cdot x' = 2(r_0 - r_1)^2\left(1 - \cos\frac{r_0}{r_1}\theta\right) \text{이므로}$$

$$\left|\frac{dx}{d\theta}\right| = 2(r_0 - r_1)\sin\left(\frac{r_0}{2r_1}\right)\theta$$

$$\kappa^2 = \frac{(x' \times x'') \cdot (x' \times x'')}{(x' \cdot x')^3} = \frac{(r_0 + 2r_1)^2}{8r_1^2(r_0 - r_1)^2(1 - \cos(r_0/r_1)\theta)}$$

$$s = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta}\left|\frac{dx}{d\theta}\right| = \frac{4r_1(r_0 - r_1)}{r_0}cos\left(\frac{r_0}{2r_1}\right)\theta \Rightarrow s^2 = \frac{16r_1^2(r_0 - r_1)^2}{r_0^2}cos^2\left(\frac{r_0}{2r_1}\right)\theta$$

$$\therefore \frac{s^2}{A^2} + \frac{1}{\kappa^2 B^2} = 1,\ \tau = 0,\ A < B$$

단, $A = \frac{4r_1(r_0 - r_1)}{r_0}$, $B = \frac{4r_1(r_0 - r_1)}{r_0 + 2r_1}$

5.27 만일 C가 평면곡선이라면, C와 C^*가 Bertrand 곡선인 곡선 C^*가 항상 존재함을 보여라.

〈풀이〉 연습문제 5.12를 사용한다.

C^*를 $x^* = x(s) + \alpha n(s)$로 정의하고 C^*가 Bertrand 곡선임을 보이면 된다.

$$\frac{dx^*}{ds} = (\dot{x} + \alpha\dot{n}) = (1 - \alpha\kappa)t \quad (\because\ C\text{가 평면곡선이므로 } \tau = 0\text{이다})$$

$$\Rightarrow \left|\frac{dx^*}{ds}\right| = |1 - \alpha\kappa|$$

$$\therefore t^* = \frac{(1 - \alpha\kappa)t}{|1 - \alpha\kappa|} = \text{sign}(1 - \alpha\kappa)t = \pm t$$

$$\frac{dt^*}{ds} = \pm\dot{t} = \pm\kappa n$$

$\therefore \dfrac{dt^*}{ds^*} = \dfrac{dt^*}{ds} \Big/ \left|\dfrac{dt^*}{ds}\right| = \pm \dfrac{\kappa}{|1-\alpha\kappa|} n$ 이므로 n^*는 n과 평행하다.

즉, C^*와 C는 같은 주법선을 가지므로 Bertrand 곡선이 존재한다.

5.28 자연방정식이 $\kappa = \dfrac{1}{as+b}$, $\tau = 0$, $s > 0$, $a > 0$ 인 곡선을 결정하여라.

〈풀이〉 $\dot{\phi} = \kappa = \dfrac{1}{as+b}$ 라고 하면 ⋯ ①

$\phi = \displaystyle\int \frac{1}{as+b} ds + C_1 = \frac{1}{a} ln(as+b) + C_1$

$\Rightarrow as + b = e^{a(\phi - C_1)}$을 ①에 대입하면

$\kappa = e^{-a(\phi - C_1)} \Rightarrow \dfrac{1}{\kappa(\phi)} = e^{a(\phi - C_1)}$이므로

$x = \displaystyle\int \frac{1}{\kappa(\phi)} (\cos\phi e_1 + \sin\phi e_2) d\phi + C_2 = \int e^{a(\phi - C_1)} (\cos\phi e_1 + \sin\phi e_2) d\phi + C_2$

부분적분법을 사용하면

$$x = \frac{1}{1+a^2} e^{a(\phi - C_1)} \{(\sin\phi + a\cos\phi) e_1 + (a\sin\phi - \cos\phi)\} + C_2$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} e^{a(\phi - C_1)} \left[\left(\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} sin\phi + \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} cos\phi \right) e_1 + \left(\frac{a}{\sqrt{1+a^2}} sin\phi - \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} cos\phi \right) e_2 \right]$$ 이므로

$\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}, \cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}$ 라 하면

$x = \dfrac{1}{1+a^2} e^{a(\phi - C_1)} \{\cos(\phi - \alpha) e_1 + \sin(\phi - \alpha) e_2\} + C_2$

$C_1 = \alpha$, $C_2 = 0$, $\phi - \alpha = \theta$라 하면

$x = \dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}} e^{a\theta} (\cos\theta e_1 + \sin\theta e_2) = ce^{a\theta} (\cos\theta e_1 + \sin\theta e_2)$

$r\cos\theta = ce^{a\theta}\cos\theta$, $r\sin\theta = ce^{a\theta}\sin\theta$ 이므로

곡선은 대수나선 $r = ce^{a\theta}$이다.

5.29 곡선 $x = te_1 + t^2 e_2 + t^3 e_3$의 접선곡면의 방정식을 구하여라.

〈풀이〉 $x' = e_1 + 2te_2 + 3t^2 e_3$

접선곡면의 방정식은 $x^* = x + kt$이므로

$x^* = (t+k)e_1 + (t^2 + 2kt)e_2 + (t^3 + 3kt^2)e_3$, $-\infty < k < \infty$

5.30 원의 모든 신개선은 합동임을 보여라.

〈풀이〉 $x = a(\cos t)e_1 + a(\sin t)e_2$라 하면

$x' = -a(\sin t)e_1 + a(\cos t)e_2$, $|x'| = a$ 이므로

$$t = -(\sin t)e_1 + (\cos t)e_2,\ \ s = \int_0^t |x'|dt = at$$

$$\therefore\ \ x^* = x + (c-s)t = a(\cos t)e_1 + a(\sin t)e_2 + (c-at)[-(\sin t)e_1 + (\cos t)e_2]$$

$$= [a(\cos t) - (c-at)\sin t]e_1 + [a(\sin t) + (c-at)\cos t]e_2$$

$$\dot{x}^* = -[(c-at)\cos t]e_1 - [(c-at)\sin t]e_2$$

$$\Rightarrow |\dot{x}^*| = (c-at)$$

$$\ddot{x}^* = [a\cos t + (c-at)\sin t]e_1 + [a\sin t - (c-at)\cos t]$$

$$\dot{x}^* \times \ddot{x}^* = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -(c-at)\cos t & -(c-at)\sin t & 0 \\ a\cos t + (c-at)\sin t & a\sin t - (c-at)\cos t & 0 \end{vmatrix} = (c-at)^2 e_3$$

$$\Rightarrow |\dot{x}^* \times \ddot{x}^*| = (c-at)^2$$

$$\therefore\ \dot{\kappa}^* = \frac{|\dot{x}^* \times \ddot{x}^*|}{|\dot{x}^*|^3} = \frac{1}{(c-at)}$$

$$\Rightarrow \dot{\rho}^* = \frac{1}{|\dot{\kappa}^*|} = (c-at)$$

(즉, 곡률반경은 t에 비례하므로 원의 모든 신개선은 합동이다)

5.31 만일 두 곡선이 대응점에서 같은 종법선을 가진다면, 곡선은 평면곡선임을 보여라.

〈풀이〉 두 곡선이 대응점에서 같은 종법선을 가지므로

$x^* - x = \alpha(s)b(s)$로 표시할 수 있다.

$$\frac{dx^*}{ds} = t + \dot{\alpha}(s)b(s) + \alpha(s)\dot{b} = t + \dot{\alpha}(s)b - \tau\alpha(s)n$$

두 곡선이 같은 종법선을 가지므로 $b = b^*$이다.

$$\therefore\ \frac{dx^*}{ds} \cdot b = [t + \dot{\alpha}(s)b - \tau\alpha(s)n] \cdot b$$

$\Rightarrow 0 = \dot{\alpha}(s)$ ($\because$ x^*와 x는 b^*와 b에 수직)

$\therefore\ \ \alpha(s) = c$ (단, c는 0이 아닌 상수 만일, c가 0이면 두 곡선은 같은 곡선이 된다.)

$$\therefore\ \frac{dx^*}{ds} = t - \tau\alpha(s)n$$

$$t^* = \frac{dx^*}{ds^*} = \frac{dx^*}{ds}\frac{ds}{ds^*} = (\dot{t} - \dot{\tau}\alpha(s)n - \tau\alpha(s)\dot{n})\frac{ds}{ds^*}$$

$$= (\kappa n - \dot{\tau}\alpha(s)n - \kappa\tau\alpha(s)t - \tau^2\alpha(s)b)\frac{ds}{ds^*}$$

$$t^* \cdot b = \left[\kappa n - \dot{\tau}\alpha(s)n - \kappa\tau\alpha(s)t - \tau^2\alpha(s)b)\frac{ds}{ds^*}\right] \cdot b$$

$$\Rightarrow 0 = -\tau^2\alpha(s)\frac{ds}{ds^*}$$

$\alpha(s) \neq 0,\ \dfrac{ds}{ds^*} \neq 0$이므로 $\tau = 0$

$\therefore$ 곡선은 평면곡선이다.

5.32 급$\geqq 4$의 곡선 $x=x(s)$는 미분방정식 $x^{(4)}-\left(\frac{2\dot{\kappa}}{\kappa}+\frac{\dot{\tau}}{\tau}\right)x^{(3)}+\left(\kappa^2+\tau^2+\frac{\dot{\kappa}\dot{\tau}}{\kappa\tau}\right)\ddot{x}+\kappa^2\left(\frac{\dot{\kappa}}{\kappa}-\frac{\dot{\tau}}{\tau}\right)\dot{x}=0$ 을 만족함을 보여라.

〈풀이〉 $\dot{x}=t,\ \ddot{x}=\dot{t}=\kappa n,\ x^{(3)}=\dot{\kappa}n-\kappa^2t+\kappa\tau b$

$$x^{(4)}=\ddot{\kappa}n+\dot{\kappa}\dot{n}-2\kappa\dot{\kappa}t-\dot{\kappa^2}t+\dot{\kappa}\tau b+\kappa\dot{\tau}b+\kappa\tau\dot{b}$$

$$=\ddot{\kappa}n-3\kappa\dot{\kappa}t+\dot{\kappa}\tau b-\kappa^3n+\dot{\kappa}\tau b+\kappa\dot{\tau}b-\tau^2\kappa n$$

$$\left(\frac{2\dot{\kappa}}{\kappa}+\frac{\dot{\tau}}{\tau}\right)x^{(3)}=\frac{2\dot{\kappa}^2}{\kappa}n-2\kappa\dot{\kappa}t+2\dot{\kappa}\tau b+\frac{\dot{\tau}\dot{\kappa}}{\tau}n-\frac{\dot{\tau}\kappa^2}{\tau}t+\kappa\dot{\tau}b$$

$$\left(\kappa^2+\tau^2+\frac{\dot{\kappa}\dot{\tau}}{\kappa\tau}\right)\ddot{x}=\kappa^3n+\tau^2\kappa n+\frac{\dot{\kappa}\dot{\tau}}{\tau}n+\frac{2\dot{\kappa}^2-\kappa\ddot{\kappa}}{\kappa}n$$

$$\kappa^2\left(\frac{\dot{\kappa}}{\kappa}-\frac{\dot{\tau}}{\tau}\right)\dot{x}=\kappa\dot{\kappa}t-\frac{\kappa^2\dot{\tau}}{\tau}t$$

$$\therefore x^{(4)}-\left(\frac{2\dot{\kappa}}{\kappa}+\frac{\dot{\tau}}{\tau}\right)x^{(3)}+\left(\kappa^2+\tau^2+\frac{\dot{\kappa}\dot{\tau}}{\kappa\tau}\right)\ddot{x}+\kappa^2\left(\frac{\dot{\kappa}}{\kappa}-\frac{\dot{\tau}}{\tau}\right)\dot{x}=0$$

5.33 만일 곡선이 구면위에 있으면 $\frac{d}{dx}\left(\frac{\dot{\kappa}}{\kappa^2\tau}\right)-\frac{\tau}{\kappa}=0$임을 보여라.

〈풀이〉 $x=x(s)$가 중심이 y_0, 반지름이 a인 구면 위에 놓여있다고 하면 문제 5.5에 의하여

$$\left(\frac{1}{\kappa}\right)^2+\left(\frac{\dot{\kappa}}{\kappa^2\tau}\right)^2=a^2\text{이다.}$$

양변을 미분하면,

$$-\frac{2}{\kappa^3}\dot{\kappa}+2\left(\frac{\dot{\kappa}}{\kappa^2\tau}\right)\cdot\frac{d}{ds}\left(\frac{\dot{\kappa}}{\kappa^2\tau}\right)=0$$

$$\Rightarrow\frac{2}{\kappa^3}\dot{\kappa}=2\left(\frac{\dot{\kappa}}{\kappa^2\tau}\right)\cdot\frac{d}{ds}\left(\frac{\dot{\kappa}}{\kappa^2\tau}\right)$$

$$\therefore\frac{d}{ds}\left(\frac{\dot{\kappa}}{\kappa^2\tau}\right)-\frac{2}{\kappa^3}\dot{\kappa}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{\kappa^2\tau}{\dot{\kappa}}\right)=0$$

$$\Rightarrow\frac{d}{ds}\left(\frac{\dot{\kappa}}{\kappa^2\tau}\right)-\frac{\tau}{\kappa}=0$$

5.34 (a) 회전원추면 위의 나선을 원추면의 축에 수직인 평면 위에로 내린 정사영은 대수나선임을 보여라.

(b) 회전원추면 위에 나선의 방정식은

$\kappa=\frac{1}{as},\ \tau=\frac{1}{bs},\ a,b=$상수 임을 보여라.

5.35 곡선 $x=x(s)$의 신개선 $x^*=x+(c-s)t$의 열률은 $\tau^*=\frac{(\dot{\kappa}\tau-\kappa\dot{\tau})}{|(c-s)\kappa|(\kappa^2+\tau^2)}$ 임을 보여라**.**

〈풀이〉 $x^*=x+(c-s)t$라 하면

$$\dot{x}^* = \dot{x} - t + (c-s)\dot{t} = (c-s)\kappa n$$
$$\ddot{x}^* = -\kappa n + (cs)\dot{\kappa} n + (c-s)\kappa \dot{n}$$
$$= (-\kappa + (c-s)\dot{\kappa})n + \kappa(c-s)(-\kappa t + \tau b)$$
$$\Rightarrow \dot{x}^* \times \ddot{x}^* = (c-s)^2\kappa^2\tau t + (c-s)^2\kappa^3 b$$
$$|\dot{x}^* \times \ddot{x}^*|^2 = (c-s)^4\kappa^4\tau^2 + (c-s)^4\kappa^6 = (c-s)^4\kappa^4(\tau^2+\kappa^2)$$
$$(x^*)^{(3)} = (-\dot{\kappa} - \dot{\kappa} + (c-s)\ddot{\kappa})n + (-\kappa + (c-s)\dot{\kappa})(-\kappa t + \tau b)$$
$$+ \dot{\kappa}(c-s)(-\kappa t + \tau b) - \kappa(-\kappa t + \tau b) + \kappa(c-s)(-\dot{\kappa} t + \dot{\tau} b - \kappa \dot{t} + \tau \dot{b})$$
$$= [(2\kappa^2 - 3\kappa\dot{\kappa}(c-s)]t + [-\tau\dot{\kappa} + (c-s)\ddot{\kappa} - \kappa\tau^2(c-s) - \kappa^3(c-s)]n$$
$$+ [-2\kappa\tau + \tau(c-s)\dot{\kappa}\tau + \kappa\dot{\tau}(c-s)]b$$
$$\Rightarrow [\dot{x}^* \ddot{x}^* (x^*)^{(3)}] = 2(c-s)^2\kappa^4\tau - 3(c-s)^3\kappa^3\dot{\kappa}\tau - 2(c-s)^2\kappa^4\tau$$
$$+ 2(c-s)^3\kappa^3\dot{\kappa}\tau + (c-s)^3\kappa^4\dot{\tau}$$
$$= (c-s)^3\kappa^3(\kappa\dot{\tau} - \dot{\kappa}\tau)$$
$$\tau^* = \frac{[\dot{x}^* \ddot{x}^* (x^*)^{(3)}]}{|\dot{x}^* \times \ddot{x}^*|^2} = \frac{(c-s)^3\kappa^3(\kappa\dot{\tau} - \dot{\kappa}\tau)}{(c-s)^4\kappa^4(\tau^2+\kappa^2)}$$
$$\therefore \tau^* = \frac{(\dot{\kappa}\tau - \kappa\dot{\tau})}{|(c-s)\kappa|(\kappa^2+\tau^2)}$$

5.36 평면곡선의 축폐선은 나선임을 보여라.

〈풀이〉 C가 평면곡선이라면 $\tau = 0$이고 그의 축폐선은 $x^* = x + \frac{1}{\kappa}n + \frac{\gamma}{\kappa}b$, γ=상수 (142p)

$\gamma = \cot(c)$이므로 일정한 주기를 갖는다.

$\therefore$ x^*는 나선이다.

5.37 $\cot\left[\int \tau ds + c\right]$은 축폐선에서 열률의 곡률에 대한 비임을 보여라.

5.39 대응점에서 상나선의 열률과 나선의 중심의 자취의 열률과의 곱은 κ^2임을 증명하여라.

5.40 곡률과 열률이 일정한 경우의 Frenet 방정식을 적분하여라.

5.41 나선이 구면 위에 있을 때, 그의 축에 수직인 평면 위에 내린 정사영은 외파선의 호임을 보여라.

5.42 회전포물면 위의 나선을 그의 축에 수직인 평면 위에 내린 정사영은 원의 신개선임을 보여라.

5.43 두 Bertrand 곡선의 열률의 곱은 일정함을 증명하여라.

5.44 $|g(t)| = 1, |g'(t)| = 1$일 때 곡선 C가

$$x = a\int g(t)dt + b\int g(t) \times g'(t)dt$$

로 정의된다면, C는 Bertrand 곡선임을 보여라.

제6장

6.26 다음 중 어느 것이 (i) 개집합, (ii) 폐집합, (iii) 유계집합, (iv) 연결집합, (v) 긴밀집합인지를 결정하여라.

(a) E^1에서 두 개의 서로소인 유한 폐구간 : (ii), (iii), (v)

(b) E^2에서 두 개의 서로소인 개원판 : (i), (iii)

(c) E^2에서 두 개의 서로소인 개원판의 여집합 : (ii), (iv)

(d) E^3에서 두 개의 서로소인 폐구면 : (ii), (iii), (v)

(e) E^3에서 두 개의 서로소인 폐구면 : (ii), (iv)

(f) E^3에서 원환면 : (ii), (iii), (iv), (v)

(g) E^3에서 원환면의 여집합 : (i), (iv)

6.27 E에 있는 몇 개의 폐집합의 교집합은 폐집합임을 증명하여라.

$E_1,\ E_2,\ \cdots,\ E_n$을 E에서의 폐집합이라 하면

$E_1^c,\ E_2^c,\ \cdots,\ E_n^c$은 E에서의 개집합이 되므로 정리 6.1의 (b)에 의하여

$\bigcup_{i=1}^{n} E_i^c$은 개집합이 된다.

De Morgan의 법칙에 의하여 $\bigcap_{i=1}^{n} E_i$는 폐집합이 된다.

∴ E에 있는 몇 개의 폐집합의 교집합은 폐집합이다.

6.28 P가 E에서 집합 S의 극한점이기 위한 필요충분조건은 P를 포함하는 모든 개집합이 P와 다른 S의 점을 포함하는 것임을 증명하여라.

$\Rightarrow$) P가 E에서 집합 S의 극한점이라고 하고, P를 포함하는 모든 개집합이
P와 다른 S의 점을 포함하지 않는다고 가정하면
P의 삭제근방 $S'(P)$는 P와 다른 S의 점을 포함하지 않는다
이것은 P가 S의 극한점이라는 사실에 모순이므로 P를 포함하는 모든 개집합이
P와 다른 S의 점을 포함한다.

$\Leftarrow$) P를 포함하는 모든 개집합이 P와 다른 S의 점을 포함한다고 하면
$S'(P)$는 P를 제외한 적어도 다른 S의 점을 포함하기 때문에
극한점의 정의에 의하여 P는 S의 극한점이다.

∴ P가 E에서 집합 S의 극한점이기 위한 필요충분조건은
P를 포함하는 모든 개집합이 P와 다른 S의 점을 포함하는 것이다.

6.29 만일 P가 E에서 집합 S의 극한점이라면, P를 포함하는 모든 개집합이 무한히 많은 S의 점을 포함함을 보여라.

문제 6.6의 방법을 사용한다.

P를 포함하고 P가 S의 극한점이므로 P와 다른 유한개의 점 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_n$만을 포함하는 개집합의 하나를 $S_i(P)$라고 하자.

ϵ을 P에서 가장 가까운 Q_i까지의 거리라고 하면

$\epsilon = \min\{d(P,Q_1),\ d(P,Q_2),\ \cdots, d(P,Q_n)\}$이다.

그러면 $S_\epsilon(P)$는 P와 다른 S의 아무점도 포함하지 않는다.

이것은 P가 S의 극한점이라는 사실에 모순이다.

$\therefore$ P가 E에서 집합 S의 극한점이라면, P를 포함하는 모든 개집합이 무한히 많은 S의 점을 포함한다.

6.30 E에서 유한개의 점을 포함하는 집합은 유계임을 보여라.

집합 S의 모든 점들을 $P_1, P_2, \cdots, P_n$이라 하자.

$\epsilon = \max\{d(P_i, P_j) \mid i, j = 1, 2, \cdots, n\}$이라 하면

$S \subset S_\epsilon(P)$이므로 유계의 정의에 의하여

$\therefore$ E에서 유한개의 점을 포함하는 집합은 유계이다.

6.31 E에서 유한개의 구면근방의 합집합은 유계집합임을 보여라.

$S_{\epsilon_1}(P_1), S_{\epsilon_2}(P_2), \cdots, S_{\epsilon_n}(P_n)$을 유한개의 구면근방이라 하자.

$\epsilon = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i$라 하면 $\bigcup_{i=1}^{n} S_{\epsilon_i}(P_i) \subset S_\epsilon(P_i)$

$\therefore$ E에서 유한개의 구면근방의 합집합은 유계집합임을 보여라.

6.32 E에서 한 집합의 극한점의 집합은 폐집합임을 보여라.

P를 극한점의 집합이라 하고, 개집합이라고 가정하면

P^c는 폐집합이므로, 연습문제 6.5에 의하여

P^c는 극한점을 포함하게 되므로 $P \bigcap P^c \neq \varnothing$이 되어 모순이 된다.

$\therefore$ E에서 한 집합의 극한점의 집합은 폐집합이다.

6.33 만일 T가 E에서 집합 S를 포함하는 폐집합이라면, T는 S의 폐포 $\hat{S}$를 포함함을 보여라.

T가 E에서 집합 S를 포함하는 폐집합이라고 하고, $T \subset \hat{S}$라고 가정하면

$S \subset T \subset \hat{S}$이다.

폐포의 정의에 의하여 이러한 T는 존재하지 않아야 하므로 모순이 되므로

$\hat{S} \subseteq T$이다.

$\therefore$ T가 E에서 집합 S를 포함하는 폐집합이라면, T는 S의 폐포 $\hat{S}$를 포함한다.

6.34 P가 S의 여집합의 내점이라면, 점 P를 집합 S의 外點(Exterior Point)이라 부른다. 문제 6.8을 보라. S의 外部(Exterior)라 불리는 S의 외점들의 집합은 개집합임을 보여라.

T를 S^c의 내부라 하고, P를 T안의 임의의 점이라 하자.

P는 S^c의 내점이므로 S에 포함되는 근방 $S(P)$가 존재한다.

Q를 $S(P)$안의 점이라 하면, $S(P)$는 개집합이므로 S에 포함되는 $S^*(Q)$가 존재한다. 따라서, Q는 T안에 있게 되고, $S(P)$안의 임의의 점이므로, $S(P)$의 모든 점은 T안에 있다.

$\therefore$ T는 개집합이므로 S의 외점들의 집합은 개집합이다.

6.35 P가 S의 내점도 외점도 아닐 때, 점 P는 S의 境界點(Boundary Point)이라 부른다. S의 境界(Boundary)라 불리는 S의 경계점들의 집합은 폐집합임을 보여라.

S를 경계라 하면 S^c는 내부 또는 외부가 된다.

연습문제 6.5와 보충문제 6.34에 의하여 내부와 외부는 모두 개집합이므로

S는 폐집합이다.

6.36 E는 연결집합임을 증명하여라.

$x_1, x_2 \in E$라고 하면

일차함수 $x(t) = x_1 + t(x_2 - x_1)$, $0 \leqq t \leqq 1$은 x_1과 x_2를 연결하는 직선이다.

그러므로 E는 호상연결이다.

정리 6.4에 의하여 E는 연결집합이다.

6.37 S가 E^2에서 긴밀집합이기 위한 필요충분조건은 S가 E^3에서 평면의 부분집합으로 여겨질 때 긴밀집합인 것임을 증명하여라.

S가 E^2에서 긴밀집합이지만 E^3에서는 긴밀집합이 아니라고 가정하자.

그러면 $S = \bigcup_{i \in I} O_i$인 개집합족 $\{O_i\}_{i \in I}$가 존재한다.

지금 A를 O_i와 S를 포함하는 평면(P^*)과의 교집합이라고 하자.

그러면 $A = O_i \bigcap P^* = \bigcup_{i \in I} (O_i \bigcap P^*)$이므로 긴밀집합이 아니게 된다.

이것은 S가 E^2에서 긴밀집합이라는 사실에 모순이다.

그러므로 S가 E^3에서 평면의 부분집합으로 여겨질 때 긴밀집합이다.

역으로 S가 E^3에서 긴밀집합이라고 가정하고 E^2에서 긴밀집합이 아니라고 가정하자.

그러면 $S = \bigcup_{i \in I} O_i$인 평면 안의 개집합족 $\{O_i\}_{i \in I}$가 존재한다.

각 O_i는 개집합이므로 O_i안의 임의의 점 P_i에 대하여 P_i를 포함하는 근방 $S(P_i)$가 존재한다

$S^*(P_i)$를 E^3안의 점 P_i의 근방으로서 평면과의 교집합을 $S(P_i)$라하고, $A = \bigcup_{P_i \in O_i} S^*(P_i)$라고 하면

A는 E^3의 개부분집합이다.

S가 E^3에서 긴밀집합이므로 유한 개부분집합$\{O_{i_1}, O_{i_2}, \cdots, O_{i_n}\}$이 존재하여

$A = \bigcup_{m=1}^{n} O_{i_n}$이 되고 이것은 S가 E^2에서 긴밀집합이 아니라는 사실에 모순이다.

그러므로 S는 E^2에서 긴밀집합이다.

6.38 [정리 6.6]을 사용하지 말고, 직접 정의로부터 E는 긴밀집합이 아님을 보여라.
E를 긴밀집합이라고 가정하고, $P_1, P_2, \cdots, P_n, \cdots$을 E안의 점들이라고 하자.
O_i를 P_i를 품는 개집합이라고 하면 (P_j는 품을 수도 품지 않을 수도 있다)
(단, $i=1,2,\cdots,n,\cdots$) $E=\bigcup_{i=1}^{\infty} O_i$이다.
가정에서 E는 긴밀집합이라고 했으므로 $E=\bigcup_{k=1}^{m} U_k$인
개집합족 $\{U_1, U_2, \cdots, U_k\}$이 존재한다.(단, U_i는 O_j중의 하나이다)
그러면 $P \not\in U_k$ 인 적당한 점 P가 존재한다.
이것은 $E=\bigcup_{k=1}^{m} U_k$ 라는 사실에 모순이다.
그러므로 E는 긴밀집합이 아니다.

6.39 [정리 6.6]을 사용하지 말고, 직접 E에서 긴밀집합의 폐부분집합은 긴밀집합임을 보여라.
S를 E에서 긴밀집합이라고 하고, T를 S의 폐부분집합이라고 하자.
그러면 $T=\bigcup_{i\in I} O_i$이다. (단, O_i는 개집합)
$S=T\bigcup(S-T) \Rightarrow S=\left(\bigcup_{i\in I} O_i\right)\bigcup(S-T)$
$S-T$는 하나의 개집합이고, S는 긴밀집합이므로
$T=\bigcup_{i=1}^{m} O_i$인 개집합족$\{O_1, O_2, \cdots, O_m\}$이 존재한다.
$\therefore$ E에서 긴밀집합의 폐부분집합은 긴밀집합이다.

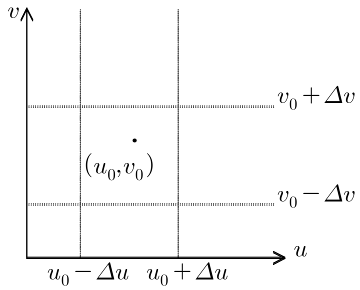
6.40 E에서 긴밀집합 S의 모든 무한부분집합 S^*는 S에서 극한점을 가짐을 증명하여라.
극한점을 갖지 않는다고 가정하자. $P\in S^*$인 P에 대하여 P의 삭제근방 $S'(P)$는 S의 점을 포함하지 않으므로 $S'(P)$는 적어도 S^c의 한 점을 포함한다.
그것은 P는 S^c의 극한점이라는 것을 의미한다.
정리 6.3에 의하여 S^c는 폐집합이므로 S는 개집합이다. 이것은 S가 긴밀집합이라는 사실에 모순이다. 그러므로 E에서 긴밀집합 S의 모든 무한부분집합 S^*는 S에서 극한점을 가진다.

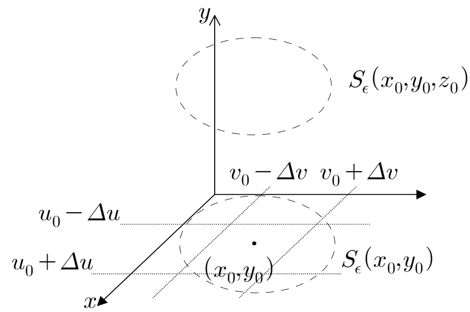
6.41 만일 $E(u,v)$가 S에서 연속이라면 $x=u,\ y=v, z=f(u,v)$는 S(E^2 안의)에서 E^3에로의 1-1 양연속사상을 정의함을 증명하여라.
이 사상은 x,y,z의 항으로 u와 v에 관하여 풀면 얻어지는 역사상 $u=x,\ v=y$를 갖는 1-1사상이다. (곡선을 xy축으로 정사영시킨 후 uv와 대응시키면 된다.)
이 사상은 좌표선 $u=c=$상수를 평행직선족 $x=c$에로 $v=k=$상수를 $y=k$에로 $z=f(x,y)$로 보내는 사상임을 알 수 있다.
그러므로 $xyz-$좌표상에서 (x_0,y_0,z_0)의 근방 $S_\epsilon(x_0,y_0,z_0)$에 대하여 이 근방을 $xy-$평면에로 정사영시킨 근방 $S_\epsilon(x_0,y_0)$이 주어질 때, $x=u_0+\Delta u,\ x=u_0-\Delta u,\ y=v_0+\Delta v,\ y=v_0-\Delta v$를 갖는 사각형이

$S_\epsilon(x_0,y_0)$에 포함되는 충분히 작은 Δu와 Δv를 잡는다.

$S_\delta(u_0,v_0)$가 사각형 $u_0-\Delta u<u<u_0+\Delta u,\ v_0-\Delta v<v<v_0+\Delta v$에 포함되도록 δ를 잡는다. ($\delta=\epsilon$이라 하면 된다)

그러면 $S_\delta(u_0,v_0)$안의(u,v)에 대하여(x,y)는 $S_\epsilon(x_0,y_0)$에 들어가서 $S_\epsilon(x_0,y_0,z_0)$에 들어가고, (u_0,v_0)는 임의의 점이므로 이 사상은 uv－평면 위에서 연속이다.





6.42 $x=au+bv+c,\ y=du+ev+f,\ ae-bd\neq 0$는 uv－평면에서 xy－평면 위에로의 1-1 양연속사상을 정의함을 증명하여라.

$$x-c=au+bv, y-f=du+ev \Rightarrow \begin{pmatrix} x-c \\ y-f \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$ae-bd\neq 0$이므로 $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x-c \\ y-f \end{pmatrix}$

$$\therefore u=\frac{1}{ae-bd}(ex-ec-by+bf), v=\frac{1}{ae-bd}(-dx+dc+ay-af)$$

이므로 xy－평면 위에로의 1-1사상이다.

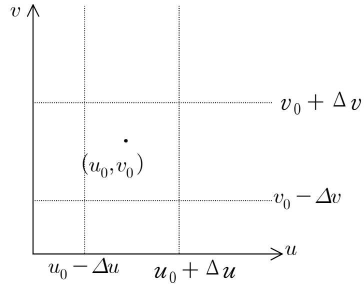
xy－평면에서 (x_0,y_0)의 근방 $S_\epsilon(x_0,y_0)$가 주어질 때 변

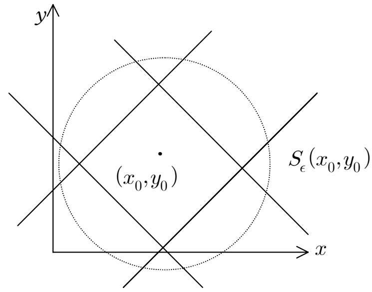
$x=a(u_0+\Delta u)+b(v_0+\Delta v)+c,\ x=a(u_0-\Delta u)+b(v_0+\Delta v)+c$

$y=d(u_0+\Delta u)+e(v_0+\Delta v)+f,\ y=d(u_0+\Delta u)+e(v_0-\Delta v)+f$

을 갖는 사각형이 $S_\epsilon(x_0,y_0)$에 포함되는 충분히 작은 Δu와 Δv를 잡는다.

지금 $S_\delta(u_0,v_0)$이 사각형 $u_0-\Delta u<u<u_0+\Delta u,\ v_0-\Delta v<v<v_0+\Delta v$에 포함되도록 하는 δ





※ $ae-bd\neq 0$의 의미는 직선이 평행하지 않다는 것을 의미한다.

를 잡으면 $S_\delta(u_0,v_0)$안의(u,v)에 대하여(x,y)는 $S_\epsilon(x_0,y_0)$에 들어간다.
한편, (u_0,v_0)는 임의의 점이므로 이 사상은 $uv-$평면 위에서 연속이다.

6.43 f를 집합 S(E 안의)에서 F에로의 사상이라 하자. 이때, "f는 S안의 P_0에서 불연속이다"를 정의하여라.
만일 모든 $S(P_0)$에 대하여 $f(P)$가 $[S(f(P_0))]^c$에 들어가는 $S(P_0)$안의 점 P가 존재하는 근방 $S(f(P_0))$이 존재한다면, f는 P_0에서 불연속이다.

6.44 사상 $x=u, y=v,\ z=\begin{cases} u^2+v^2, & u \geqq 0 \\ 1, & u<0 \end{cases}$ 는

(a) $(-1,-1)$에서 연속
$f(-1,-1)=(-1,-1,1)$은 평면상의 점이다.
$f(-1,-1)$을 포물선과 만나지 않도록 하는 $\epsilon<1$에 대하여
$S_\delta(-1,-1)$안의 모든 (u,v)에 대하여
$f(u,v)$를 $S_\epsilon(f(-1,-1))$안에 놓이게 하는 $S_\delta(-1,-1)$이 존재한다.
그러므로 $(-1,-1)$에서 연속이다.

(b) $(1,1)$에서 연속
$f(1,1)=(1,1,\sqrt{2})$은 포물선상의 점이다.
$f(1,1)$을 평면과 만나지 않도록 하는 $\epsilon<1$에 대하여
$S_\delta(1,1)$안의 모든 (u,v)에 대하여
$f(u,v)$를 $S_\epsilon(f(1,1))$안에 놓이게 하는 $S_\delta(1,1)$이 존재한다.
그러므로 $(1,1)$에서 연속이다.

(c) $(1,0)$에서 연속
$f(1,0)=(1,0,1)$은 포물선상의 점이다.
$f(1,0)$을 평면과 만나지 않도록 하는 $\epsilon<1$에 대하여
$S_\delta(1,0)$안의 모든 (u,v)에 대하여
$f(u,v)$를 $S_\epsilon(f(1,0))$안에 놓이게 하는 $S_\delta(1,0)$이 존재한다.
그러므로 $(1,0)$에서 연속이다.

(d) $(0,2)$에서 불연속임을 보여라.
$f(0,2)=(0,2,4)$은 포물선상의 점이다.
$f(0,2)$를 평면과 만나지 않도록 하는 $\epsilon<3$에 대하여
$S_\delta(0,2)$안의 모든 (u,v)에 대하여
$f(u,v)$를 $S_\epsilon(f(0,2))$안에 놓이게 하는 $S_\delta(1,1)$이 존재하여야 한다.
그러나 $S_\delta(0,2)$안에는 $u<0$인 부분이 포함되어 있으므로 이러한(u,v)에 대하여,
$f(u,v)$는 평면 위에 있으므로 $S_\epsilon(f(0,2))$에는 들어가지 않는다.
그러므로 $(0,2)$에서 불연속이다.

6.45 정사각형은 사각형에서 원 위에로의 1-1 양연속사상을 보임으로서, 원과 위상적으로 동치임을 보여라.

정사각형(X_1) : $|x|+|y|=1$, 원(X_2) : $x^2+y^2=1$으로 정의하자.

f : $X_1 \to X_2$를 $f(x,y)=\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$

f^{-1}: $X_2 \to X_1$를 $f^{-1}(x,y)=\left(\dfrac{x}{|x|+|y|},\dfrac{y}{|x|+|y|}\right)$로 정의하면

f는 1-1, 연속이고, f^{-1}도 연속이므로 정사각형은 원과 위상적으로 동치이다.

6.46 f 를 점들 사이의 거리를 보존하는 집합 S(E 안의)에서 F에로의 사상이라 하자. 즉, S안의 임의의 P와 Q에 대하여, $d(P,Q)=d(f(P),f(Q))$이다. 이 때, f 는 S에서 $f(S)$위에로의 위상동형사상임을 보여라.

f 가 위상동형사상임을 보이기 위해서

f 가 연속(continuous)이고 개사상(open mapping)임을 보이면 된다.

모든 $S(f(P_0))$에 대하여 $f(S(P_0)\bigcap S) \subseteq S(f(P_0))$를 만족하는$S(P_0)$가 존재하므로

(거리를 보존해 주므로) f는 S안의 임의의 점 P_0에서 연속이다.

$O=B_\delta(P)$라고 하자. 개집합 $B_\delta(P)$안의 임의의 점 Q에 대하여

$d(Q,P)=d(f(P),f(Q))<\delta$이므로 $\delta=\epsilon$이라고 하면

$f(O)$도 $f(S)$에서 개집합이므로 f 는 개사상이다.

그러므로 f 는 S에서 $f(S)$위에로의 위상동형사상임을 보여라.

6.47 f 를 연결집합 S(E 안의)에서 $x-$축 위에로의 연속사상이라 하자.

만일 $f(P)=a$, $f(Q)=b$, $a<b$이고 c는 구간 $a< x < b$안에 있는 임의의 수라면 $f(P_0)=c$를 만족하는 S안의 점 P_0가 존재함을 보여라.

$f(P_0)=c$를 만족하는 S안의 점 P_0가 존재하지 않는다고 가정하자.

$x-$축 집합을 X라고 하고

$O_1=\{x \mid x<c\}$, $O_2=\{x \mid x>c\}$라고 하면 $a\in A$, $b\in B$이므로

(1) $X\subseteq O_1\bigcup O_2$, (2) $O_1\bigcap X\neq\varnothing$, $O_1\bigcap X\neq\varnothing$, (3) $(O_1\bigcap X)\bigcap(O_2\bigcap X_2)=\varnothing$

이므로 X는 연결이 아니다.

그러나 f 는 연속사상이므로 S가 연속이 아니라는 것이 되므로 모순이다.

$\therefore$ $f(P_0)=c$를 만족하는 S안의 점 P_0가 존재한다.

6.48 f 가 긴밀집합 S(E 안의)에서 F에로의 연속사상이라면, [정리 6.6]과 [정리 6.8]을 사용하지 말고, 직접 $f(S)$는 F에서 유계집합임을 보여라.

P_i를 S의 임의의 점이라고 하자. f는 연속사상이므로

F의 근방 $S(f(P_i))$에 대하여 $S(P_i)\bigcap E$안의 모든 P_i에 대하여

$f(P_i)$가 $S(f(P_i))$에 들어가는 E안의 근방 $S(P_i)$가 존재한다.

S는 긴밀집합이므로 $S(P_i)$는 유한 개 존재한다.

그러므로 $S(f(P_i))$도 유한 개 존재한다.

$\therefore\ f(S) \subset \bigcup_{i \in I} S(f(P_i)) = \bigcup_{i=1}^{n} S(f(P_i)) = F$이므로 $f(S)$는 F에서 유계이다.

6.49 f를 폐집합 C(E 안의)에서 F에로의 연속사상이라 하자. C^*를 F에서 임의의 폐집합이라 하자. 이 때, $f(P)$가 C^*에 들어가는 E안의 점 P들의 집합은 E에서 폐집합임을 보여라.

$f(P)$가 C^*에 들어가는 E안의 점 P들의 집합을 O라하고, 개집합이라고 가정하자.

개집합의 정의에 의하여 $O \cap C$안의 임의의 점 P에 대하여 $S(P)$인 개부분집합이 존재하고, $f(P)$가 C^*에 들어가는 연속사상이므로 $f(S(P))$는 C^*의 개부분집합이 되는데 이것은 C^*가 폐집합이라는 사실에 모순이다.

$\therefore\ f(P)$가 C^*에 들어가는 E안의 점 P들의 집합은 E에서 폐집합이다.

6.50 "O가 F에서 어떤 개집합이라면, $f(P)$가 O안에 있는 S안의 점 P의 집합은 개집합이다."를 만족하는 집합 S(E 안의)에서 F에로의 사상을 f라 하자. 이 때, f는 S위에서 연속임을 보여라.

〈풀이〉 O가 F에서 어떤 개집합이라면, $f(P)$가 O안에 있는 S안의 점 P의 집합은 개집합이므로, 이 집합을 O^*라고 하자.

$f(O^*)$가 F에서 개집합이라는 것을 보이면 증명은 끝난다.

O^*는 S에서 개집합이므로 개집합의 정의에 의하여 임의의 한 점 P에 대하여

$S(P) \subset O^*$인 $S(P)$가 존재한다.

문제의 주어진 명제에 의하여 개집합 $S(P)$가 존재하므로 그에 대응되는 $f(S(P))$가 존재하고, $f(S(P)) \subset f(O^*)$이므로 $f(O^*)$는 F에서 개집합이다.

$\therefore\ f$는 S위에서 연속이다.

6.51 위상적으로 동치가 되는 성질은 유클리드 공간 안의 집합 사이의 동치관계임을 보여라.

A와 B가 위상적으로 동치이면 $f: A \to B$가 1-1 양연속사상인 f가 존재한다.

(1) Reflexive (반사율)

임의의 집합 A에 대하여 항등함수 $i: A \to A$가 존재한다.

(2) Symmetric (대칭율)

임의의 두 집합 A, B에 대하여 $f: A \to B$가 1-1 양연속사상인 f가 존재한다.

$\Rightarrow f^{-1}: B \to A$도 1-1 양연속사상이다.

(3) Transitive (추이율)

임의의 세 집합 A, B, C에 대하여

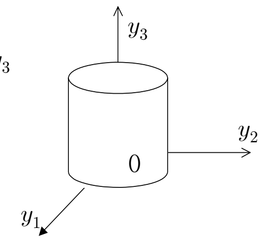
$f: A \to B$가 1-1 양연속사상인 f가 존재하고

$g: B \to C$가 1-1 양연속사상인 g가 존재한다.

$\Rightarrow g \circ f: A \to C$도 1-1 양연속사상이다.

$\therefore$ 위상적으로 동치가 되는 성질은 유클리드 공간 안의 집합 사이의 동치관계이다.

제7장



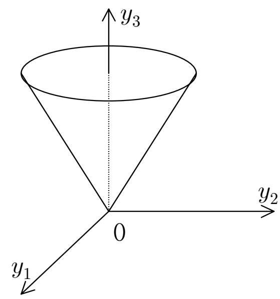
7.30 $y = \cos x_1 \boldsymbol{g_1} + \sin x_1 \boldsymbol{g_2} + x_2 \boldsymbol{g_3}$은 반띠 $0 \leqq x_1 < 2\pi,\ -\infty < x_2 < \infty$를 중심이 y_3 축에 있고 반지름이 1인 원주면 위에 전단사로 사상함을 보여라.

$y = y_1 \boldsymbol{g_1} + y_2 \boldsymbol{g_2} + y_3 \boldsymbol{g_3}$라 하자. 그러면

$y_1 = \cos x_1,\ y_2 = \sin x_1,\ y_3 = x_2$이므로

$y_1^2 + y_2^2 = 1,\ y_3 = x_2,\ 0 \leqq x_1 < 2\pi,\ -\infty < x_2 < \infty$ 이다.

이것은 중심이 y_3축에 있고 반지름이 1인 원주면 위에 전단사로 사상한다.



7.31 $y = \sinh x_1 \sin x_2 \boldsymbol{g_1} + \sinh x_1 \cos x_2 \boldsymbol{g_2} + \sinh x_1 \boldsymbol{g_3}$은 반띠 $x_1 \geqq 0,\ 0 < x_2 < 2\pi$를 y_3축을 축으로 하는 원추면 위에로 사상함을 보여라.

$y = y_1 \boldsymbol{g_1} + y_2 \boldsymbol{g_2} + y_3 \boldsymbol{g_3}$라 하자. 그러면

$y_1 = \sinh x_1 \sin x_2,\ y_2 = \sinh x_1 \cos x_2,\ y_3 = \sinh x_1$이므로

$y_1^2 + y_2^2 = \sinh x_1^2 = y_3^2,\ x_1 \geqq 0,\ 0 < x_2 < 2\pi$이다.

이것은 y_3축을 축으로 하는 원추면 위에로 사상한다.

7.32 선형사상 $y_1 = 2x_2 + x_2 - x_3,\ y_2 = x_1 - x_2 - 2x_3,\ y_3 = 3x_1 + 3x_2$의 계수는 2임을 보이고 E^3으로부터 사상되어지는 평면을 결정하여라.

이 사상의 행렬표현은

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

이다. $2y_1 - y_2 = y_3$이므로, 이것이 평면의 방정식이고 소행렬식 $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$이므로 이 사상의 계수는 2이다.

7.33 [정리 7.1] (ii)를 증명하여라 : E^3에서 E^3에로의 선형사상 $\boldsymbol{f}$가 E^3을 E^3안의 평면 위에로 사상하기 위한 필요충분조건은 $\boldsymbol{f}$의 계수가 2이다.

$\Rightarrow$) $\boldsymbol{f}$가 E^3을 E^3안의 평면 위에로 사상한다고 하자.

E^3에서의 평면은 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e_3}) = m_1 \boldsymbol{f}(\boldsymbol{e_1}) + m_2 \boldsymbol{f}(\boldsymbol{e_2})$ (단, $m_i \in \boldsymbol{R},\ i = 1,2$)

의 형태이므로 $\boldsymbol{f}$의 계수가 2이다.

$\Leftarrow$) $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e_1}), \boldsymbol{f}(\boldsymbol{e_2}), \boldsymbol{f}(\boldsymbol{e_3})$이 종속이고 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e_1}), \boldsymbol{f}(\boldsymbol{e_2})$가 독립이라고 하자.

$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e_1}), \boldsymbol{f}(\boldsymbol{e_2}), \boldsymbol{f}(\boldsymbol{e_3})$이 종속이므로

$k_1 \boldsymbol{f}(\boldsymbol{e_1}) + k_2 \boldsymbol{f}(\boldsymbol{e_2}) + k_3 \boldsymbol{f}(\boldsymbol{e_3}) = 0$이고 (단, $k_i \in \boldsymbol{R},\ i = 1,2,3$)

$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e_1}), \boldsymbol{f}(\boldsymbol{e_2})$가 서로 독립이므로

$l_1 \boldsymbol{f}(\boldsymbol{e_1}) + l_2 \boldsymbol{f}(\boldsymbol{e_2}) = 0$인 l_1과 l_2는 존재하지 않으므로

$f(e_3)=m_1f(e_1)+m_2f(e_2)$ (단, $m_i\in\boldsymbol{R},\ i=1,2$)이다.

그러므로 f 는 평면위로 사상한다.

7.34 [정리 7.2] (ii)를 증명하여라 : E^2에서 E^3에로의 선형사상 f 가 E^2에서 E^3안의 직선 위에로 사상하기 위한 필요충분조건은 f 의 계수가 1이다.

$\Rightarrow$) f 가 E^2에서 E^3안의 직선 위에로 사상한다고 하자.

그러면 직선의 방정식에 의하여

$m_1f(e_1)+m_2f(e_2)=0$ (단, $m_i\in\boldsymbol{R},\ i=1,2$)이다.

즉, $f(e_1),f(e_2)$는 서로 종속이므로f 의 계수가 1이다.

$\Leftarrow$) f 의 계수가 1이라고 하자.

$f(x)=f(x_1e_1+x_2e_2)=x_1f(e_1)+x_2f(e_2)$이다.

$f(e_1),f(e_2)$는 서로 종속이므로

$f(x)=x_1f(e_1)+x_2f(e_2)=mf(e_1)=nf(e_2)$이므로 (단, $m,n\in\boldsymbol{R}$)

f 는 직선위로 사상한다.

7.35 $f(x)=\begin{cases} x_1\sin\dfrac{1}{x_2}+x_2\sin\dfrac{1}{x_1} & (x_1x_2\neq 0) \\ 0 & (x_1x_2=0)\end{cases}$ 은 $x=0$에서 연속임을 보여라.

$x_1x_2=0\Rightarrow f(0,0)=0$이다.

$x_1x_2\neq 0$이면 $0\leqq x_1\sin\dfrac{1}{x_2}\leqq x_1$이므로 Squeeze theorem에 의하여

$$\lim_{(x_1,x_2)\to 0}0\ \leqq \lim_{(x_1,x_2)\to 0}x_1\sin\frac{1}{x_2}\leqq \lim_{(x_1,x_2)\to 0}x_1$$

$$\Rightarrow 0\ \leqq \lim_{(x_1,x_2)\to 0}x_1\sin\frac{1}{x_2}\leqq 0\ \Rightarrow\ \lim_{(x_1,x_2)\to 0}x_1\sin\frac{1}{x_2}=0$$

같은 방법으로

$$\lim_{(x_1,x_2)\to 0}x_1\sin\frac{1}{x_2}=0$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{(x_1,x_2)\to 0}x_1\sin\frac{1}{x_2}+x_2\sin\frac{1}{x_1}=0=f(0)$$

이므로 $x=0$에서 연속이다.

7.36 만일 f 가 x에 관한 선형사상이라면, 모든 x에 대하여 $|f(x)|<M|x|$를 만족하는 $M>0$이 존재함을 보여라.

문제 7.5에 의하여f 가 x에 관한 선형사상이므로

$f(x)=\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\left[\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\right]g_i$와 같이 주어진다.

$$\therefore f(x)=x_1(a_{11}g_1+\cdots+a_{mn}g_m)+x_2(a_{12}g_1+\cdots+a_{m2}g_m)+\cdots$$
$$+x_n(a_{1n}g_1+\cdots+a_{mn}g_m)$$

$\therefore\ |f(x)| = \sqrt{x_1^2(a_{11}+\cdots+a_{m1})^2+\cdots+x_n^2(a_{1n}+\cdots+a_{mn})^2} < M|x|$

7.37 만일 f 와 g가 x에서 연속이라면, $f+g$도 x에서 연속임을 보여라.

f 가 x에서 연속이므로

모든 $\epsilon>0$에 대하여, V와 $|y-x|<\delta_1$안의 y에 대하여

$|f(y)-f(x)|<\dfrac{\epsilon}{2}$을 만족하는 $\delta_1>0$이 존재한다.

g가 x에서 연속이므로

모든 $\epsilon>0$에 대하여, V와 $|y-x|<\delta_2$안의 y에 대하여

$|g(y)-g(x)|<\dfrac{\epsilon}{2}$을 만족하는 $\delta_2>0$이 존재한다.

$\therefore\ \delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$라 하면

모든 $\epsilon>0$에 대하여, V와 $|y-x|<\delta$안의 y에 대하여

$$|(f+g)(y)-(f+g)(x)| = |f(y)-f(x)+g(y)-g(x)|$$
$$\leqq |f(y)-f(x)|+|g(y)-g(x)| < \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon$$ 이므로

f 와 g가 x에서 연속이라면, $f+g$도 x에서 연속이다.

7.38 만일 f 가 긴밀집합 V위에서 연속이라면, V안의 x에 대하여 $|f(x)|\leqq M$을 만족하는 $M\geqq 0$이 존재함을 보여라.

f 가 긴밀집합 V위에서 연속이므로 정리 6.8에 의하여

V안의 x에 대하여 $f(x)$도 긴밀이다.

$\therefore$ 정리 6.6에 의하여 $f(x)$는 유계이므로 $|f(x)|\leqq M$을 만족하는 $M\geqq 0$이 존재한다.

7.39 $f=f_1g_1+\cdots f_mg_m$과 $L=L_1g_1+\cdots L_mg_m$일 때, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$이기 위한 필요충분조건은 $\lim\limits_{x\to x_0} f_i(x)=L_i,\ i=1,\cdots,m$ 임을 보여라.

$\Rightarrow)$ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$이므로

모든 $\epsilon>0$에 대하여, V와 $|x-x_0|<\delta$안의 x에 대하여

$|f(x)-L|<\epsilon$을 만족하는 $\delta>0$이 존재한다.

$$\therefore\ |(f_1(x)g_1+\cdots f_m(x)g_m)-(L_1g_1+\cdots L_mg_m)|$$
$$=|(f_1(x)-L_1)g_1+\cdots (f_m(x)-L_m)g_m|$$
$$\leqq |(f_1(x)-L_1)||g_1|+\cdots+|(f_m(x)-L_m)||g_m|<\epsilon$$
$$\therefore\ |f_i(x)-L_i|\leqq|(f_1(x)-L_1)||g_1|+\cdots+|(f_m(x)-L_m)||g_m|<\epsilon\quad(i=1,\cdots,m))$$

$\Leftarrow)$ $\lim\limits_{x\to x_0} f_i(x)=L_i,\ i=1,\cdots,m$ 이므로

모든 $\epsilon>0$에 대하여, V와 $|x-x_0|<\delta$안의 x에 대하여

$|f_i(x)-L_i|<\dfrac{\epsilon}{m}$을 만족하는 $\delta>0$이 존재한다.

그러므로 모든 $\epsilon > 0$에 대하여, V와 $|x-x_0| < \delta$안의 x에대하여

$|(f_1(x)g_1 + \cdots f_m(x)g_m) - (L_1 g_1 + \cdots L_m g_m)|$

$= |(f_1(x) - L_1)g_1 + \cdots (f_m(x) - L_m)g_m|$

$\leqq |(f_1(x) - L_1)||g_1| + \cdots + |(f_m(x) - L_m)||g_m| < \frac{\epsilon}{m} + \frac{\epsilon}{m} + \cdots + \frac{\epsilon}{m} = \epsilon$이므로

$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$

7.40 만일$\lim_{x\to x_0} f(x) = L$와$\lim_{x\to x_0} g(x) = M$이라면$\lim_{x\to x_0} f(x) \cdot g(x) = L \cdot M$임을 보여라.

$f(x) \cdot g(x) - L \cdot M = (f(x) - L) \cdot g(x) + L \cdot (g(x) - M)$ 이므로

$|f(x) \cdot g(x) - L \cdot M| \leqq |f(x) - L| \cdot |g(x)| + |L| \cdot |g(x) - M|$

$t \to t_0$일 때 $g(x) \to M$이므로 적당한 $\delta' > 0$이 존재하여,

$0 < |t - t_0| < \delta'$ 일 때 $|g(x)| \leqq K$인 양수 K가 존재한다.

$t \to t_0$일 때 $f(x) \to L$이므로 적당한 $\delta_1 > 0$ $(\delta_1 \leqq \delta')$이 존재하여,

$0 < |t - t_0| < \delta_1$일 때 $|f(x) - L| < \frac{\epsilon}{2K}$이다.

따라서, $|f(x) - L| \cdot |g(x)| < \frac{\epsilon}{2K} \cdot K = \frac{\epsilon}{2} \cdots$ ①

i) $L = 0$이면 $|L| \cdot |g(x) - M| = 0$이므로 임의의 $\epsilon > 0$에 대하여

$|L| \cdot |g(x) - M| < \frac{\epsilon}{2}$이다.

ii) $L \neq 0$이면 $|L| > 0$이므로 적당한 $\delta_2 > 0$에 대하여

$0 < |t - t_0| < \delta_2$일 때 $|g(x) - M| < \frac{\epsilon}{2|L|}$

$\therefore$ $|L| \cdot |g(x) - M| < |L| \cdot \frac{\epsilon}{2|L|} = \frac{\epsilon}{2} \cdots$ ②

$\therefore$ $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$라 하면 ①과 ②에 의하여

$0 < |t - t_0| < \delta \Rightarrow |f(x) \cdot g(x) - L \cdot M| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$

$\therefore$ $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$와$\lim_{x\to x_0} g(x) = M$이라면$\lim_{x\to x_0} f(x) \cdot g(x) = L \cdot M$이다.

7.41 만일 f 가 E위의 일차함수라면, f 는 E에서 연속임을 보여라.

200p의 표현을 참고한다.

f 가 E위의 일차함수이므로 $f(x)$의 성분은 다음과 같이 나타난다.

$f_m(x) = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n$

$f_m(x)$는 E에서 연속이므로 문제 7.39에 의하여

$f(x) = f_1(x)g_1 + f_2(x)g_2 + \cdots + f_m(x)g_m$은 E에서 연속이다.

7.42 점$\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$에서 $\boldsymbol{u}_0=(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2)/\sqrt{2}$ 방향으로

함수 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=x_1x_2\boldsymbol{e}_1+(x_1^2+x_2^2)\boldsymbol{e}_2$의 도함수를 구하여라.

$\boldsymbol{f}$ 의 편도함수는 연속이므로, [정리 7.8](213p)로부터 $\boldsymbol{f}$ 는 미분가능하다.

$$D_u\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=d\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{u})=\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_1}u_1+\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_2}u_2 \text{이므로}$$

$$D_u\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=(x_2\boldsymbol{e}_1+2x_1\boldsymbol{e}_2)u_1+(x_1\boldsymbol{e}_1+2x_2\boldsymbol{e}_2)u_2$$

$$\therefore\ D_{u_0}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)=(\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2)\frac{1}{\sqrt{2}}+(\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\mathbf{0}$$

7.43 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=(x_1^2+x_2^2)^{-1}\boldsymbol{e}_1+(x_1^2-x_2^2)^{-1}\boldsymbol{e}_2$일 때

(a) 연속적으로 미분가능한 점 (x_1,x_2)의 집합

$$f_1(\boldsymbol{x})=\frac{1}{x_1^2+x_2^2} \text{이므로 } \boldsymbol{x}=\mathbf{0}\text{에서 미분불능이다.}$$

$$f_1(\boldsymbol{x})=\frac{1}{x_1^2-x_2^2} \text{이므로 } x_1=\pm x_2\text{에서 미분불능이다.}$$

$\therefore\ x_1\neq\pm x_2,\ \boldsymbol{x}=\mathbf{0}$인 점에서 연속적으로 미분가능하다.

(b) $\boldsymbol{f}$ 의 Jacobian을 결정하여라.

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{f})(\boldsymbol{x})=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}\\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-\dfrac{2x_1}{(x_1^2+x_2^2)^2} & -\dfrac{2x_2}{(x_1^2+x_2^2)^2}\\ -\dfrac{2x_1}{(x_1^2-x_2^2)^2} & \dfrac{2x_2}{(x_1^2-x_2^2)^2}\end{vmatrix}$$

$$=-\frac{8x_1x_2}{(x_1^2+x_2^2)^2(x_1^2-x_2^2)^2}$$

7.44 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=(x_1\sin x_2\cos x_3)\boldsymbol{e}_1+(x_1\sin x_2\sin x_3)\boldsymbol{e}_2+(x_1\cos x_2)\boldsymbol{e}_3$의 계수가 3이되는 점 (x_1,x_2,x_3)의 집합을 결정하여라.

$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{f})(\boldsymbol{x})\neq 0$ 이어야 하므로

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{f})(\boldsymbol{x})=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_3}\\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_3}\\ \dfrac{\partial f_3}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_3}{\partial x_2} & \dfrac{\partial f_3}{\partial x_3}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\sin x_2\cos x_3 & \sin x_2\sin x_3 & \cos x_2\\ & x_1\cos x_2\cos x_3 & x_1\cos x_2\sin x_3\\ -x_1\sin x_2 & & -x_1\sin x_2\sin x_3\\ x_1\sin x_2\cos x_3 & 0 & \end{vmatrix}$$

$$=\sin x_2\cos x_3(x_1^2\sin^2x_2\cos x_3)-\sin x_2\sin x_3(-x_1^2\sin^2x_2\sin x_3)$$
$$+\cos x_2(x_1^2\sin x_2\cos x_2\cos^2x_3+x_1^2\sin x_2\cos x_2\sin^2x_3)$$
$$=x_1^2\sin^3x_2(\cos^2x_3+\sin^2x_3)+x_1^2\cos^2x_2\sin x_2(\cos^2x_3+\sin^2x_3)$$
$$=x_1^2\sin^3x_2+x_1^2\sin x_2\cos^2x=x_1^2\sin x_2(\sin^2x_2+\cos^2x_2)=x_1^2\sin x_2$$

$\therefore\ x_1^2\sin x_2\neq 0$이면 계수가 3이다.

7.45 $x_0 = e_1 + e_2$에 대응하는 점에서 $y = (x_1^2 + x_2^2)e_1 - x_1 x_2^2 e_2 + x_2 x_1^2 e_3$으로 정의되는 E^3안의 곡면의 접평면의 방정식을 구하여라.

$dy = \dfrac{\partial y}{\partial x_1} dx_1 + \dfrac{\partial y}{\partial x_2} dx_2$

$\quad = (2x_1 e_1 - x_2^2 e_2 + 2x_1 x_2 e_3) dx_1 + (2x_2 e_1 - 2x_1 x_2 e_2 + x_1^2 e_3) dx_2$

$\quad = 2(x_1 dx_1 + x_2 dx_2) e_1 - (x_2^2 dx_1 + 2x_1 x_2 dx_2) e_2 + (2x_1 x_2 dx_1 + x_1^2 dx_2) e_3$

$x_0 = e_1 + e_2$ 에서 $x_1 = 1,\ x_2 = 1$이므로

$y_0 = 2e_1 - e_2 + e_3,\ dy_0 = 2(dx_1 + dx_2)e_1 - (dx_1 + 2dx_2)e_2 + (2dx_1 + dx_2)e_3$

따라서 y_0에서의 접평면의 방정식은

$y = y_0 + dy_0 = (2 + 2dx_1 + 2dx_2)e_1 + (-1 - dx_1 - 2dx_2)e_2 + (1 + 2dx_1 + dx_2)e_3$

$dx_1 = v_1,\ dx_2 = v_2$라 하면

$y_1 = 2 + 2v_1 + 2v_2,\ y_2 = -1 - v_1 - 2v_2,\ y_3 = 1 + 2v_1 + v_2$이다.

7.46 E^3위의 함수 f 의 Jacobian은 삼중적

$$J(f) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial f}{\partial x_3} \right]$$

으로 주어지는 것을 보여라.

209~210p의 내용을 참고하면

$$J(f) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{vmatrix} \text{이고 } |A| = |A^T| \text{이므로}$$

$$J(f) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{vmatrix}^T = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_3} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{vmatrix} = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial f}{\partial x_3} \right]$$

7.47 만일 f 와 g가 x에서 미분가능하다면,

(a) $f + g$는 x에서 미분가능하고, $d(f+g) = df + dg$

f와 g가 미분가능하므로

$f(x+v) = f(x) + df(x)(v) + R_1(x,v)$

$g(x+v) = g(x) + dg(x)(v) + R_2(x,v)$가 성립한다.

단, $\lim\limits_{v \to 0} \dfrac{|R_1(x,v)|}{|v|} = \lim\limits_{v \to 0} \dfrac{|R_2(x,v)|}{|v|} = 0$이다.

위의 두 식을 더하면

$f(x+v)+g(x+v)=f(x)+g(x)+df(x)(v)+dg(x)(v)+R(x,v)$

단, $R(x,v)=R_1(x,v)+R_2(x,v)$ 이다.

$\lim\limits_{v\to 0}\frac{|R_1(x,v)|}{|v|}=\lim\limits_{v\to 0}\frac{|R_2(x,v)|}{|v|}=0$ 이므로 $\lim\limits_{v\to 0}\frac{|R(x,v)|}{|v|}=0$ 이 되므로

$f+g$는 x에서 미분가능하고, $d(f+g)=df+dg$이다.

(b) $f\times g$는 x에서 미분가능하고, $d(f\times g)=(df)\times g+f+dg$

v의 함수

$$\begin{aligned}R(x,v)&=f(x+v)\times g(x+v)-f(x)\times g(x)\\&\quad -f(x)\times dg(x)(v)-g(x)\times df(x)(v)\\&=f(x+v)\times[g(x+v)-g(x)-dg(x)(v)]\\&\quad +[f(x+v)-f(x)-df(x)(v)]\times g(x)+[f(x+v)-f(x)]\times dg(x)(v)\end{aligned}$$

를 생각한다.

f와 g가 미분가능하므로

$f(x+v)=f(x)+df(x)(v)+R_1(x,v)$

$g(x+v)=g(x)+dg(x)(v)+R_2(x,v)$ 가 성립한다.

단, $\lim\limits_{v\to 0}\frac{|R_1(x,v)|}{|v|}=\lim\limits_{v\to 0}\frac{|R_2(x,v)|}{|v|}=0$ 이다.

따라서 윗식에 대입하면,

$$\begin{aligned}\frac{|R(x,v)|}{|v|}&=\frac{1}{|v|}|f(x+v)\times R_2(x,v)+g(x)\times R_1(x,v)\\&\qquad +[f(x+v)-f(x)]\times dg(x)(v)|\\&\leqq |f(x+v)|\times\frac{|R_2(x,v)|}{|v|}+|g(x)|\times\frac{|R_1(x,v)|}{|v|}\\&\qquad +|[f(x+v)-f(x)]|\times\frac{|dg(x)(v)|}{|v|}\end{aligned}$$

f가 x에서 연속이고, 문제 7.18에 의하여 $\frac{|dg(x)(v)|}{|v|}$는 $v\neq 0$에 대하여

연속이므로 $f(x+v)$는 0의 근방 안의 v에 대하여 연속이다.

또한 $\lim\limits_{v\to 0}\frac{|R_1(x,v)|}{|v|}=\lim\limits_{v\to 0}\frac{|R_2(x,v)|}{|v|}=0$ 이고 f가 x에서 연속이므로

$\lim\limits_{v\to 0}|f(x+v)-f(x)|=0$ 이므로 $\lim\limits_{v\to 0}\frac{|R(x,v)|}{|v|}=0$ 이다.

그러므로

$$\begin{aligned}f(x+v)\times g(x+v)&=f(x)\times g(x)+f(x)\times dg(x)(v)\\&\quad +g(x)\times df(x)(v)+R(x,v)\end{aligned}$$ 이므로

$f\times g$는 x에서 미분가능하고, $d(f\times g)=(df)\times g+f+dg$

7.48 $\begin{cases}w_1=y_1+y_2+y_3\\ w_2=y_1y_2\\ w_3=y_1y_3\end{cases}$ 와 $\begin{cases}y_1=x_1x_2x_3\\ y_2=e^{x_2}\\ y_3=e^{x_3}\end{cases}$ 이라 둘 때, $\frac{\partial(w_1w_2w_3)}{\partial(x_1x_2x_3)}$을 결정하여라.

연습문제 7.23에 의해서

$$\left|\frac{\partial w_i}{\partial y_i}\right| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y_2 & y_1 & 0 \\ y_3 & 0 & y_1 \end{vmatrix} = y_1^2 - y_1 y_2 - y_1 y_3 = x_1 x_2 x_3 (x_1 x_2 x_3 - e^{x_2} - e^{x_3})$$

$$\left|\frac{\partial y_i}{\partial x_i}\right| = \begin{vmatrix} x_2 x_3 & x_1 x_3 & x_1 x_2 \\ 0 & e^{x_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{x_3} \end{vmatrix} = x_2 x_3 e^{x_2} e^{x_3} \text{이므로}$$

$$\frac{\partial(w_1 w_2 w_3)}{\partial(x_1 x_2 x_3)} = \left|\frac{\partial w_i}{\partial y_i}\right| \left|\frac{\partial y_i}{\partial x_i}\right| = (y_1^2 - y_1 y_2 - y_1 y_3)(x_2 x_3 e^{x_2} e^{x_3})$$

$$= x_1 x_2^2 x_3^2 (x_1 x_2 x_3 - e^{x_2} - e^{x_3}) e^{x_2 + x_3}$$

7.49 $\boldsymbol{x_0} = \boldsymbol{e_1} + \pi \boldsymbol{e_2}$에서 $\boldsymbol{f}(x) = (x_1 + x_2)^2 \boldsymbol{e_1} + x_1 \sin x_2 \boldsymbol{e_2}$의 다음 도함수를 구하여라.

(a) $\dfrac{\partial^2 \boldsymbol{f}}{\partial x_1 \partial x_2}$

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_1} = 2(x_1 + x_2)\boldsymbol{e_1} + \sin x_2 \boldsymbol{e_2} \ , \quad \frac{\partial^2 \boldsymbol{f}}{\partial x_1 \partial x_2} = 2\boldsymbol{e_1} + \cos x_2 \boldsymbol{e_2}$$

$$x_1 = 1,\ x_2 = \pi \Rightarrow \frac{\partial^2 \boldsymbol{f}}{\partial x_1 \partial x_2} = 2\boldsymbol{e_1} - \boldsymbol{e_2}$$

(b) $\dfrac{\partial^3 \boldsymbol{f}}{\partial x_1 \partial x_2^2}$

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{f}}{\partial x_1 \partial x_2} = 2\boldsymbol{e_1} + \cos x_2 \boldsymbol{e_2} \Rightarrow \frac{\partial^2 \boldsymbol{f}}{\partial x_1 \partial x_2^2} = -\sin x_2 \boldsymbol{e_2}$$

$$x_1 = 1,\ x_2 = \pi \Rightarrow \frac{\partial^2 \boldsymbol{f}}{\partial x_1 \partial x_2^2} = \boldsymbol{0}$$

(c) $\boldsymbol{u_0} = (\boldsymbol{e_1} + 2\boldsymbol{e_2})$와 $\boldsymbol{v_0} = (\boldsymbol{e_1} - \boldsymbol{e_2})$에서 $D_{v_0 u_0} \boldsymbol{f}$

$$D_{u_0} \boldsymbol{f} = \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_1} u_1 + \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_2} u_2$$

$$= [2(x_1 + x_2)\boldsymbol{e_1} + \sin x_2 \boldsymbol{e_2}] u_1 + [2(x_1 + x_2)\boldsymbol{e_1} + x_1 \cos x_2 \boldsymbol{e_2}] u_2$$

$$= [2(x_1 + x_2) u_1 + 2(x_1 + x_2) u_2] \boldsymbol{e_1} + [\sin x_2 u_1 + x_1 \cos x_2 u_2] \boldsymbol{e_2}$$

$$D_{v_0 u_0} \boldsymbol{f} = [2u_1 + 2u_2] v_1 \boldsymbol{e_1} + [\cos x_2 u_2] v_1 \boldsymbol{e_2}$$

$$+ [2u_1 + 2u_2] v_2 \boldsymbol{e_1} + [\cos x_2 u_1 - x_1 \sin x_2 u_2] v_2 \boldsymbol{e_2}$$

$x_1 = 1,\ x_2 = \pi,\ u_1 = 1,\ u_2 = 2,\ v_1 = 1,\ v_2 = -1$이므로

$$D_{v_0 u_0} \boldsymbol{f} = -2\boldsymbol{e_2} + \boldsymbol{e_2} = -\boldsymbol{e_2}$$

7.50 $\boldsymbol{w} = (y_1 + y_2)\boldsymbol{e_1} + e^{y_1 + y_2} \boldsymbol{e_2}$와 $\boldsymbol{y} = x_1 x_2^2 \boldsymbol{e_1} + x_1^2 x_2 \boldsymbol{e_2}$일 때, 연쇄법칙을 이용하여

$\dfrac{\partial^2 \boldsymbol{w}}{\partial x_1 \partial x_2}$를 구하여라.

연습문제 7.27의 결과를 이용한다.

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial y_1}=\boldsymbol{e_1}+e^{y_1+y_2}\boldsymbol{e_2},\ \ \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial y_2}=\boldsymbol{e_1}+e^{y_1+y_2}\boldsymbol{e_2},\ \ \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}}{\partial y_1\partial y_2}=\frac{\partial^2 \boldsymbol{w}}{\partial y_2\partial y_1}=e^{y_1+y_2}\boldsymbol{e_2}$$

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{w}}{\partial y_1^2}=e^{y_1+y_2}\boldsymbol{e_2},\ \ \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}}{\partial y_2^2}=e^{y_1+y_2}\boldsymbol{e_2}$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1}=x_2^2,\ \ \frac{\partial y_1}{\partial x_2}=2x_1x_2,\ \ \frac{\partial y_2}{\partial x_1}=2x_1x_2,\ \ \frac{\partial y_1}{\partial x_2}=x_1^2,\ \ \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1\partial x_2}=\frac{\partial^2 y_1}{\partial x_2\partial x_1}=0$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \boldsymbol{w}}{\partial x_1\partial x_2}&=\left[\frac{\partial^2 \boldsymbol{w}}{\partial y_1^2}\frac{\partial y_1}{\partial x_1}+\frac{\partial^2 \boldsymbol{w}}{\partial y_2\partial y_1}\frac{\partial y_2}{\partial x_1}\right]\frac{\partial y_1}{\partial x_2}+\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial y_1}\frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1\partial x_2}\\ &\quad+\left[\frac{\partial^2 \boldsymbol{w}}{\partial y_1\partial y_2}\frac{\partial y_1}{\partial x_1}+\frac{\partial^2 \boldsymbol{w}}{\partial y_2^2}\frac{\partial y_2}{\partial x_1}\right]\frac{\partial y_2}{\partial x_2}+\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial y_2}\frac{\partial^2 y_2}{\partial x_1\partial x_2}\\ &=(2x_1+2x_2)\boldsymbol{e_1}+e^{y_1+y_2}[(x_1^2+2x_1x_2)(x_2^2+2x_1x_2)+(2x_1+2x_2)]\boldsymbol{e_2}\end{aligned}$$

7.51 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=(x_1^2-x_2^2)\boldsymbol{e_1}+x_1x_2\boldsymbol{e_2}$는$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$을 제외한 모든$\boldsymbol{x}$에 대하여 역함수정리의 조건을 만족하지만 이 집합상에서는 $1-1$이 아님을 보여라.

$f_1=x_1^2-x_2^2,\ f_2=x_1x_2$는 E^2위에서 C^1-급이다.

모든 $\boldsymbol{x}$에 대하여 $J(\boldsymbol{f})=\begin{vmatrix}2x_1 & -2x_2\\ x_2 & x_1\end{vmatrix}=2x_1^2+2x_2^2\neq 0$이다.

하지만 $x_1\neq 0$인 점 $\boldsymbol{x}$에 대하여 $(x_1,0)\neq(-x_1,0)$이지만

$\boldsymbol{f}(x_1,0)=x_1^2\boldsymbol{e_1}=\boldsymbol{f}(-x_1,0)$이므로 $1-1$이 아니다.

7.52 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\dfrac{x_1}{1+x_1+x_2+x_3}\boldsymbol{g_1}+\dfrac{x_2}{1+x_1+x_2+x_3}\boldsymbol{g_2}+\dfrac{x_3}{1+x_1+x_2+x_3}\boldsymbol{g_3}$이

$1+x_1+x_2+x_3\neq 0$을 만족하는 E^3안의 모든 $\boldsymbol{x}$에 대하여 역함수정리의 조건을 만족함을 보이고, 또 그 집합 안에서 $1-1$임을 보이고, $\boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{x})$를 구하여라.

7.53 만일 $\boldsymbol{f}$가 E안의 개집합 V위에서 역함수정리의 조건을 만족한다면, $\boldsymbol{f}$가 $1-1$인 곳에서 $J(\boldsymbol{f}^{-1})J(\boldsymbol{f})=1$임을 보여라.

$\boldsymbol{f}$가 E안의 개집합 V위에서 역함수정리의 조건을 만족하므로

$J(\boldsymbol{f})\neq 0$이고, $J(\boldsymbol{f}^{-1})\neq 0$이다.

$$J(\boldsymbol{f}^{-1})J(\boldsymbol{f})=\begin{vmatrix}\frac{\partial f_1^{-1}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1^{-1}}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1^{-1}}{\partial x_n}\\ \frac{\partial f_2^{-1}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2^{-1}}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2^{-1}}{\partial x_n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial f_m^{-1}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m^{-1}}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m^{-1}}{\partial x_n}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}\end{vmatrix}$$

$$
= \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1^{-1}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1^{-1}}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1^{-1}}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2^{-1}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2^{-1}}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2^{-1}}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m^{-1}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m^{-1}}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m^{-1}}{\partial x_n} \end{vmatrix}^T \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{vmatrix}
$$

$$
= \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1^{-1}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2^{-1}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m^{-1}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_1^{-1}}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2^{-1}}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m^{-1}}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_1^{-1}}{\partial x_n} & \frac{\partial f_2^{-1}}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial f_m^{-1}}{\partial x_n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{vmatrix} = 1
$$

7.54 $\boldsymbol{x_0} = \pi \boldsymbol{e_2}$를 중심으로 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = (x_1 \sin x_2)\boldsymbol{e_1} + (x_2 \cos x_1)\boldsymbol{e_2}$의 전개식에서 최초 3개항을 구하여라.

$$
\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_1} = \sin x_2 \boldsymbol{e_1} - x_2 \sin x_1 \boldsymbol{e_2}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_2} = x_1 \cos x_2 \boldsymbol{e_1} + \cos x_1 \boldsymbol{e_2}
$$

$$
\frac{\partial^2 \boldsymbol{f}}{\partial x_1^2} = -x_2 \cos x_1 \boldsymbol{e_2}, \quad \frac{\partial^2 \boldsymbol{f}}{\partial x_2^2} = -x_1 \sin x_2 \boldsymbol{e_1}, \quad \frac{\partial^2 \boldsymbol{f}}{\partial x_1 \partial x_2} = \cos x_2 \boldsymbol{e_1} - \sin x_1 \boldsymbol{e_2}
$$

$x_1 = 0, \ x_2 = \pi$이므로

$$
\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_2} = \boldsymbol{e_2}, \quad \frac{\partial^2 \boldsymbol{f}}{\partial x_1^2} = -\pi \boldsymbol{e_2}, \quad \frac{\partial^2 \boldsymbol{f}}{\partial x_2^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \boldsymbol{f}}{\partial x_1 \partial x_2} = -\boldsymbol{e_1}
$$

$$
\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_0}) = \pi \boldsymbol{e_2}, \quad D_{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x_0})} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_0}) = (x_2 - \pi)\boldsymbol{e_2},
$$

$D^2_{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x_0})} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_0}) = -x_1^2 \pi \boldsymbol{e_2} + 2x_1(x_2 - \pi)\boldsymbol{e_1}$ 이므로

Taylor의 전개식에 의하여 최초의 3개항은

$$
\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_0}) + D_{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x_0})} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_0}) + \frac{1}{2!} D^2_{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x_0})^2} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_0})
$$

$$
= \pi \boldsymbol{e_2} + (x_2 - \pi)\boldsymbol{e_2} - x_1(x_2 - \pi)\boldsymbol{e_1} - \frac{1}{2}\pi x_1^2 \boldsymbol{e_2}
$$

제8장

8.24 $\boldsymbol{x}=\dfrac{1}{2}(u+v)\boldsymbol{e_1}+\dfrac{1}{2}(u-v)\boldsymbol{e_2}+uv\boldsymbol{e_3}$은 쌍곡적 포물면 $x_3=x_1^2-x_2^2$의 $C^\infty-$급의 정칙매개변수표현임을 보이고, 그의 u와 $v-$매개변수곡선을 그려라.

$uv=\dfrac{1}{4}(u^2+2uv+v^2)-\dfrac{1}{4}(u^2-2uv+v^2)$이므로 $x_3=x_1^2-x_2^2$이고

$\boldsymbol{x_u}=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},v\right),\boldsymbol{x_v}=\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},u\right)$

$\Rightarrow |\boldsymbol{x_u}\times\boldsymbol{x_v}|=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e_1} & \boldsymbol{e_2} & \boldsymbol{e_3}\\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} & v\\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} & u\end{vmatrix}=\dfrac{1}{2}\sqrt{2u^2+2v^2+1}\neq 0$이므로 정칙매개변수표현이다.

8.25 x_1x_2-평면에서 타원 $\dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{x_2^2}{b^2}=1$을 지나는 우원주면(right cylinder)의 정칙매개변수표현을 구하라.

$\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{e_1}+x_2\boldsymbol{e_2}$이므로 $\boldsymbol{x}=a\cos\theta\boldsymbol{e_1}+b\sin\theta\boldsymbol{e_2}\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$

8.26 타원면 $\dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{x_2^2}{b^2}+\dfrac{x_3^2}{c^2}=1$에 대한 좌표조각사상의 기저를 구하라.

$\boldsymbol{x}=(a\sin\phi\cos\theta,b\sin\phi\sin\theta,c\cos\phi)$, $-\infty<\theta<\infty$, $0<\phi<\pi$에서 ϕ를 0에서 2π로 제한한 것은 하나의 기저가 된다.

8.27 G와 G^*가 단순곡면 S위에서 두 좌표조각사상의 상이라 할 때**,** 그의 상이 $G\cap G^*$와 같은 S안의 한 좌표조각사상이 존재함을 보여라.

$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u,v)$, $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^*(\theta,\phi)$를 각각 단순곡면 S위에서 C^m-급의 좌표조각사상으로서 그들의 공통부분을 $G\cap G^*=G$이라고 하자. 정리 8.3에 의하여, 두 개의 좌표조각사상의 공통부분에는 매개변수들이 C^m-급의 허용가능한 매개변수변환 $\boldsymbol{x}(u,v)$, $\boldsymbol{x}^*=(\theta(u,v),\phi(u,v))$ 에 의하여 연결되어 있으므로 G와 G^*가 단순곡면 S위에서 두 좌표조각사상의 상이라 할 때, 그의 상이 $G\cap G^*$와 같은 S안의 한 좌표조각사상이 존재한다.

8.28 회전면 $\boldsymbol{x}=f(u)(\cos\theta)\boldsymbol{e_1}+f(u)(\sin\theta)\boldsymbol{e_2}+g(u)\boldsymbol{e_3}$, $f>0$의 단위법선은

$\boldsymbol{N}=\dfrac{(-g'\cos\theta)\boldsymbol{e_1}-(g'\sin\theta)\boldsymbol{e_2}+f'\boldsymbol{e_3}}{[(f')^2+(g')^2]^{1/2}}$임을 보여라.

$\boldsymbol{x_u}=(f'\cos\theta,f'\sin\theta,g')$, $\boldsymbol{x_\theta}=(-f\sin\theta,f\cos\theta,0)$이므로

$$\boldsymbol{x}_u \times \boldsymbol{x}_v = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ f'\cos\theta & f'\sin\theta & g' \\ -f\sin\theta & f\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = (-fg'\cos\theta, -fg'\sin\theta, ff')$$

$$\Rightarrow |\boldsymbol{x}_u \times \boldsymbol{x}_v| = \sqrt{(fg')^2 + (ff')^2} = f\sqrt{(f')^2 + (g')^2}$$

$$\therefore \boldsymbol{N}\frac{\boldsymbol{x}_u \times \boldsymbol{x}_v}{|\boldsymbol{x}_u \times \boldsymbol{x}_v|} = \frac{(-g'\cos\theta)\boldsymbol{e}_1 - (g'\sin\theta)\boldsymbol{e}_2 + f'\boldsymbol{e}_3}{[(f')^2 + (g')^2]^{1/2}}$$

8.29 쌍곡면 $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1$은 이중선직면임을 증명하여라.

$x_1^2 = 1 - x_2^2 + x_3^2 = 1 - (x_2 - x_3)(x_2 + x_3)$이다.

$x_2 - x_3 = u,\ x_2 + x_3 = v$라 하면

$x_1 = 1 - uv,\ x_2 = \frac{1}{2}(u+v),\ x_3 = \frac{1}{2}(-u+v)$이므로

$\boldsymbol{x} = (1-uv)\boldsymbol{e}_1 + \left(\frac{1}{2}(u+v)\right)\boldsymbol{e}_2 + \left(\frac{1}{2}(-u+v)\right)\boldsymbol{e}_3$이고

$u-$매개변수표현 $v=$상수와 $v-$매개변수표현 $u=$상수는 직선들이다.

따라서 쌍곡면은 2중선직면이다.

8.30 $u=1,\ v=-1$에서 $\boldsymbol{x} = (u+v)\boldsymbol{e}_1 + (u-v)\boldsymbol{e}_2 + uv\boldsymbol{e}_3$의 접평면과 법선의 방정식을 구하라.

$\boldsymbol{x}(1,-1) = (0,2,-1)$

$\boldsymbol{x}_u = (1,1,v),\ \boldsymbol{x}_v = (1,-1,u)$이므로

$\boldsymbol{x}_u(1,-1) = (1,1,-1), \boldsymbol{x}_v(1,-1) = (1,-1,1)$

$\therefore$ 접평면의 방정식은

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y} &= \boldsymbol{x}(1,-1) + h\boldsymbol{x}_u(1,-1) + k\boldsymbol{x}_v(1,-1) \\ &= (0,2,-1) + h(1,1,-1) + k(1,-1,1) \\ &= (h+k, 2+h-k, -1-h+k),\ -\infty < h,k < \infty \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{x}_u(1,-1) \times \boldsymbol{x}_v(1,-1) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (0,-2,-2)$$ 이므로

$$\boldsymbol{N} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,-1)$$

$\therefore$ 법선의 방정식은

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y} &= \boldsymbol{x}(1,-1) + h\boldsymbol{N}(1,-1) = (0,2,-1) + k(0,-1,-1) \ \text{단, } k = \frac{h}{\sqrt{2}} \\ &= (0, 2-k, -1-k) \ \text{단, } -\infty < k < \infty \end{aligned}$$

8.31 원환면 $\boldsymbol{x} = (b + a\sin\phi)(\cos\theta)\boldsymbol{e}_1 + (b + a\sin\phi)(\sin\theta)\boldsymbol{e}_2 + (a\cos\phi)\boldsymbol{e}_3$을 다음 세 가지 개집합의 각각에 제한한 것은 하나의 기저임을 보여라.

(a) $0 < \theta < 2\pi,\ 0 < \phi < 2\pi$

(b) $-\pi < \theta < \pi,\ -\pi < \phi < \pi$

(c) $-\frac{1}{2}\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi,\ -\frac{1}{2}\pi < \phi < \frac{3}{2}\pi$

8.32 $\boldsymbol{y}=u\boldsymbol{e_1}+u^2\boldsymbol{e_2}+u^3\boldsymbol{e_3}$, $u>0$을 기저곡선, $\boldsymbol{g}=(\cos u)\boldsymbol{e_1}+(\sin u)\boldsymbol{e_2}$방향으로 모선을 갖는 선직면의 선직형식으로의 매개변수표현을 구하라. 그리고 이 매개변수표현은 정칙이고 C^∞-급임을 보여라.

매개변수 표현 : $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}+v\boldsymbol{g}=(u+v\cos u, u^2+v\sin u, u^3)$

이것은 모든 점 (u,v)에서 C^∞-급이다.

$\boldsymbol{x_u}=(1-v\sin u, 2u+v\cos u, 3u^2)$, $\boldsymbol{x_v}=(\cos u, \sin u, 0)$

$$\boldsymbol{x_u}\times\boldsymbol{x_v}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{e_1} & \boldsymbol{e_2} & \boldsymbol{e_3} \\ 1-v\sin u & 2u+v\cos u & 3u^2 \\ \cos u & \sin u & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-3u^2\sin u, -3u^2\cos u, \sin u-2u\cos u-v)$$

$$|\boldsymbol{x_u}\times\boldsymbol{x_v}|=\sqrt{9u^4+\sin^2 u+4u^2\cos^u 2-4u\sin u\cos u+4uv\cos u-2v\sin u}\neq 0$$

$\therefore$ C^∞-급의 정칙매개변수 표현이다.

8.33 추면(錐面)은 모선이 정점(vertex)이라 부르는 고정점 $\boldsymbol{p}$를 지나는 선직면이다. 만일 $\boldsymbol{g}(u)$가 모선 방향으로의 영이 아닌 벡터라 할 때 $v\neq 0, \boldsymbol{g}$가 C^∞-급이고 모든 u에 대하여 $\boldsymbol{g}\times\boldsymbol{g}'\neq\boldsymbol{0}$이라면, $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{p}+v\boldsymbol{g}(u)$는 C^m-급의 추면의 정칙매개변수표현임을 증명하여라. $\boldsymbol{g}(u)$가 모선방향으로의 영이 아닌 벡터이고 $v\neq 0, \boldsymbol{g}$가 C^∞-급이므로 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{p}+v\boldsymbol{g}(u)$는 C^m-급이다.

$\boldsymbol{x_u}=v\boldsymbol{g}'(u)$, $\boldsymbol{x_v}=\boldsymbol{g}(u)$이므로 $\boldsymbol{x_u}\times\boldsymbol{x_v}=v\boldsymbol{g}'\times\boldsymbol{g}\neq 0$이므로

$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{p}+v\boldsymbol{g}(u)$는 C^m-급의 추면의 정칙매개변수표현이다.

8.34 추면의 모선을 따라서 접평면은 일정함을 증명하여라.

문제 8.33에 의하여 추면의 정칙매개변수표현은 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{p}+v\boldsymbol{g}(u)$이다.

$\boldsymbol{x_u}=v\boldsymbol{g}', \boldsymbol{x_v}=\boldsymbol{g}$이므로 $\boldsymbol{x_u}\times\boldsymbol{x_v}=v\boldsymbol{g}'\times\boldsymbol{g}$이므로

$$\boldsymbol{N}=\frac{\boldsymbol{x_u}\times\boldsymbol{x_v}}{|\boldsymbol{x_u}\times\boldsymbol{x_v}|}=\frac{\boldsymbol{g}'\times\boldsymbol{g}}{|\boldsymbol{g}'\times\boldsymbol{g}|}\text{이다.}$$

이것은 모선을 따라서 매개변수 v에 독립이므로 추면의 모선을 따라서 접평면은 일정하다.

8.35 우나선면(right helicoid)은 모선이 축 둘레를 일정속도로 회전하는 우의원추면(right conoid)(문제 8.6을 보라)이다. x_3-축을 축으로 갖는 우나선면의 매개변수표현은 $\boldsymbol{x}=(v\cos\theta)\boldsymbol{e_1}+(v\sin\theta)\boldsymbol{e_2}+(a+b\theta)\boldsymbol{e_3}$, $b\neq 0$임을 보여라.

기저곡선으로서 x_3-축을 택한다.

우나선면은 모선이 축 둘레를 일정속도로 회전하는 우의원추면이므로 처음 출발점을 a라 하면 θ에 비례하여 움직이므로 $\boldsymbol{y}=(a+b\theta)u\boldsymbol{e_3}$라고 하자. (단, $b\neq 0$)

모선이 x_1x_2-평면에 평행하므로, u의 함수로서 모선방향의 단위벡터는

$\boldsymbol{g}=(\cos\theta(u))\boldsymbol{e_1}+(\sin\theta(u))\boldsymbol{e_2}$로 나타낼 수 있으므로

$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}+v\boldsymbol{g}=(v\cos\theta(u))\boldsymbol{e_1}+(v\sin\theta(u))\boldsymbol{e_2}+(a+b\theta)u\boldsymbol{e_3}$이 곡면의 선직형식이다.

$\boldsymbol{x_u}=(-v\theta'\sin\theta(u))\boldsymbol{e_1}+(v\theta'\cos\theta(u))\boldsymbol{e_2}+(a+b\theta)\boldsymbol{e_3}$

$\boldsymbol{x_v}=(\cos\theta(u))\boldsymbol{e_1}+(\sin\theta(u))\boldsymbol{e_2}$이므로 모든 (u,v)에 대하여

$x_u \times x_v = ((a+b\theta)\sin\theta(u))e_1 - (a+b\theta)\cos\theta(u)e_2 + v\theta' e_3$

$\Rightarrow |x_u \times x_v| = ((a+b\theta)^2 + (v\theta')^2)^{\frac{1}{2}} \neq 0 \;\; (\because \;\; b \neq 0)$

그러므로 $\theta(u)$가 C^m−급이라면 x는 C^m−급의 정칙표현이다.

만일 $\theta' \neq 0$이라면, 함수 $\theta(u)$는 역함수를 갖고

$x = (v\cos\theta)e_1 + (v\sin\theta)e_2 + (a+b\theta)e_3,\; b \neq 0$이다.

8.36 점 P가 우나선면(문제 8.35)의 모선을 따라 움직일 때 단위법선은 축과 이루는 각이 ∞에서 0으로부터 $\frac{\pi}{2}$까지 변하는 모선 주위를 돌고, 이 각의 탄젠트값은 축까지의 거리에 비례함을 증명하여라.

문제 8.35에 의하여 $x = (v\cos\theta)e_1 + (v\sin\theta)e_2 + (a+b\theta)e_3,\; b \neq 0$이다.

$x_u = (-v\sin\theta)e_1 + (v\cos\theta)e_2 + be_3$

$x_v = \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2$이므로

$x_u \times x_v = (-b\sin\theta)e_1 + (b\cos\theta)e_2 + -ve_3$

$|x_u \times x_v| = \sqrt{b^2+v^2}$

$\Rightarrow N = \frac{1}{\sqrt{b^2+v^2}}\{(-b\sin\theta)e_1 + (b\cos\theta)e_2 + (-v)e_3\}$

이것은 축과 이루는 각이 ∞에서 0으로부터 $\frac{\pi}{2}$까지 변하는 모선주위를 돌고 각의 탄젠트값은 축까지의 거리에 비례한다.

8.37 한 곡선의 접선곡면의 모선을 따르는 접평면은 모선이 지나는 곡선 위의 점에서 그 곡선의 접촉평면과 일치함을 증명하여라.

문제 8.19에 의하여 변곡점을 갖지 않는 곡선 $x = y(s)$의 단위법선벡터는 $N = \frac{\dot{t} \times t}{|\dot{t} \times t|} = b$이므로

한 곡선의 접선곡면의 모선을 따르는 접평면은 모선이 지나는 곡선 위의 점에서 그 곡선의 접촉평면과 일치한다.

8.38 Möbius띠는 선직면 $x = y(\theta) + vg(\theta),\; -\frac{1}{2} < v < \frac{1}{2}$, 단

$y(\theta) = (\cos\theta)e_1 + (\sin\theta)e_2$

$g(\theta) = \left(\sin\frac{1}{2}\theta\cos\theta\right)e_1 + \left(\sin\frac{1}{2}\theta\sin\theta\right)e_2 + \left(\cos\frac{1}{2}\theta\right)e_3$

으로 표현될 수 있다. 단위법선은 원 $y = (\cos\theta)e_1 + (\sin\theta)e_2$둘레를 한 바퀴 돌 때 방향이 바뀜을 증명하여라. <그림 8-26>을 참조하여라.

예제 8.5에서 원환면의 증명방법과 같다. 단지 $\phi = \frac{1}{2}sin\theta$로 되어있을 뿐이다.

그러므로 Möbius띠는 선직면 $x = y(\theta) + vg(\theta),\; -\frac{1}{2} < v < \frac{1}{2}$,

단 $y(\theta) = (\cos\theta)e_1 + (\sin\theta)e_2$

$$g(\theta)=\left(\sin\frac{1}{2}\theta\cos\theta\right)e_1+\left(\sin\frac{1}{2}\theta\sin\theta\right)e_2+\left(\cos\frac{1}{2}\theta\right)e_3$$

으로 표현될 수 있다.

Möbius띠는 $v=0$일 때 처음위치로 되돌아오므로

$$x_\theta|_{v=0}=(-\sin\theta,\cos\theta,0)$$

$$x_v|_{v=0}=\left(\sin\frac{\theta}{2}cos\theta,\sin\frac{\theta}{2}sin\theta,\cos\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\therefore x_u\times x_v=\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ \sin\frac{\theta}{2}cos\theta & \sin\frac{\theta}{2}sin\theta & \cos\frac{\theta}{2}\end{vmatrix}$$

$$=\left(\cos\theta\cos\frac{\theta}{2},\sin\theta\cos\frac{\theta}{2},-\sin\frac{\theta}{2}\right)=N(\theta,0)\text{ 이라 하면}$$

$$\lim_{\theta\to\pi}N(\theta,0)=-1,\quad \lim_{\theta\to-\pi}N(\theta,0)=1$$

$$\lim_{\theta\to\pi}x(\theta,0)=\lim_{\theta\to-\pi}x(\theta,0)\text{ 이므로}$$

Möbius띠의 단위법선은 원 $y=(\cos\theta)e_1+(\sin\theta)e_2$둘레를 한 바퀴 돌 때 방향이 바뀐다.

8.39 문제 8.38에서 Möbius띠로부터 원 $y=(\cos\theta)e_1+(\sin\theta)e_2$를 제외시키면, 그 곡면은 연결곡면이고 가부호적임을 증명하여라.

$$g(\theta)=\left(\sin\frac{1}{2}\theta\cos\theta\right)e_1+\left(\sin\frac{1}{2}\theta\sin\theta\right)e_2+\left(\cos\frac{1}{2}\theta\right)e_3\text{는}$$

E^3안의 점의 집합으로서 연결집합이므로 연결곡면이다.

$x=vg(\theta)$라 하면,

$$x_\theta=v\left\{\left(\frac{1}{2}cos\frac{1}{2}\theta\cos\theta-\sin\frac{1}{2}\theta\sin\theta\right)e_1+\left(\frac{1}{2}cos\frac{1}{2}\theta\sin\theta+\sin\frac{1}{2}\theta\cos\theta\right)e_2\right.$$
$$\left.+\left(-\frac{1}{2}sin\frac{1}{2}\theta\right)e_3\right\}$$

$$x_v=\left(\sin\frac{1}{2}\theta\cos\theta\right)e_1+\left(\sin\frac{1}{2}\theta\sin\theta\right)e_2+\left(\cos\frac{1}{2}\theta\right)e_3\text{ 이므로}$$

$$x_\theta\times x_v=v\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{1}{2}cos\frac{1}{2}\theta\cos\theta-\sin\frac{1}{2}\theta\sin\theta & \frac{1}{2}cos\frac{1}{2}\theta\sin\theta+\sin\frac{1}{2}\theta\cos\theta & -\frac{1}{2}sin\frac{1}{2}\theta \\ \sin\frac{1}{2}\theta\cos\theta & \sin\frac{1}{2}\theta\sin\theta & \cos\frac{1}{2}\theta\end{vmatrix}$$

$$=v\left\{\left(\frac{1}{2}(1+\cos\theta)\sin\theta\right)e_1-\left(\frac{1}{2}cos\theta+\frac{1}{2}sin^2\theta\right)e_2+\left(-\sin^2\frac{1}{2}\theta\right)e_3\right\}$$

$$\Rightarrow |x_u\times x_v|=\frac{v}{2}\sqrt{\left(1+2\sin^2\frac{\theta}{2}+2\sin^4\frac{\theta}{2}\right)}\text{ 이므로}$$

$N=\dfrac{x_u\times x_v}{|x_u\times x_v|}$은 매개변수 v에 대하여 독립이므로 곡면위에서 연속적으로 변하는 단위법선을 정의할 수 있다.

그러므로 Möbius띠로부터 원 $y=(\cos\theta)e_1+(\sin\theta)e_2$를 제외시키면, 그 곡면은 연결곡면이고 가

부호적이다.

8.40 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}(t)$를 C^m-급의 좌표조각사상 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u,v)$ 위에 C^m-급의 정칙곡선이라면, 그의 상 $u=u(t),\ v=v(t)$는 좌표평면 안에서 C^m-급의 정칙곡선임을 보여라.

$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}(t)$를 C^m-급의 좌표조각사상 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u,v)$ 위에 C^m-급의 정칙곡선이라하자.

그러면 $\boldsymbol{y}(t)$는 C^m-급이고 모든 t에 대해서 $\dfrac{d\boldsymbol{y}}{dt}\neq\boldsymbol{0}$이므로

$\boldsymbol{x}_u\dfrac{du}{dt}+\boldsymbol{x}_v\dfrac{dv}{dt}\neq\boldsymbol{0}$이다.

$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}(t)$는 정칙곡선이므로 그의 상 $u=u(t),\ v=v(t)$이 좌표평면안에서 유일하게 존재한다.

$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}(t)$는 C^m-급이고, $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u,v)$는 1-1 양연속사상이므로 그의 역사상도 C^m-급이고, 1-1 양연속사상이므로

$u=u(t),\ v=v(t)$도 C^m-급이다. $\cdots$ ①

$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u,v)$은 좌표조각사상이므로 임의의 (u,v)에 대하여 $\boldsymbol{x}_u\times\boldsymbol{x}_v\neq\boldsymbol{0}$이므로

$\boldsymbol{x}_u$와 $\boldsymbol{x}_v$는 일차독립이고, $\boldsymbol{x}_u\dfrac{du}{dt}+\boldsymbol{x}_v\dfrac{dv}{dt}\neq\boldsymbol{0}$이므로

$\dfrac{du}{dt}\neq0$이고 $\dfrac{dv}{dt}\neq0$이다. $\cdots$ ②

①,②에 의하여 $u=u(t),\ v=v(t)$는 좌표평면 안에서 C^m-급의 정칙곡선이다.

8.41 추면 $\dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{x_2^2}{b^2}-\dfrac{x_3^2}{c^2}=0,\ (x_1,x_2,x_3)\neq(0,0,0)$은 C^m-급의 초등곡면임을 보여라.

문제 8.11에 의하여 추면은 단순곡면이다.

$x_1=a\sin\phi\cos\theta,\ x_2=b\sin\phi\sin\theta,\ c=c\sin\phi$라 하고, $0<\phi<2\pi,\ 0<\theta<2\pi$라 하면

이것은 좌표조각사상을 이루는 기저가 되므로 초등곡면이다.

8.42 $\boldsymbol{T}$가 한 점 P에서 단순곡선의 접평면에 평행한 영이 아닌 벡터라 할 때 P를 지나는 곡면 위에 P에서 $\boldsymbol{T}=\dfrac{d\boldsymbol{y}}{dt}$를 만족하는 곡선 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}(t)$가 존재함을 보여라.

8.43 다음 중 어느 것이 긴밀곡면인지를 말하라.

(a) $x_1^2-x_2^4+x_3^6=1$

문제 8.20으로부터 $x_1^2-x_2^4+x_3^6=1$은 폐집합이다.

$x_1=1$이라 놓으면 $x_2^4=x_3^6\Rightarrow\ x_2^2=x_3^3$이 되지만 이 식은 임의의 큰 수 $x_2,\ x_3$에 대하여 성립하므로 긴밀곡선이 아니다.

(b) $x_1^2-2x_1+x_2^2+x_3^4=1$

문제 8.20으로부터 $x_1^2-2x_1+x_2^2+x_3^4=1$은 폐집합이다.

$(x_1-1)^2+x_2^2+x_3^2=2$에서

$|x_1-1|\leqq\sqrt{2},\ |x_2|\leqq\sqrt{2},\ |x_3|\leqq\sqrt{2}$ 이므로 유계이다.

그러므로 $x_1^2-2x_1+x_2^2+x_3^4=1$는 긴밀곡선이다.

8.44 C를 uv-평면에서 (u_0,v_0)를 끝점으로 갖는 C^1-급의 정칙호라 하고, $S(u_0,v_0)$를 (u_0,v_0)의 임의의 근방이라 하자. 이 때, $S(u_0,v_0)$안의 임의의 점 (u^*,v^*)에로 $S(u_0,v_0)$안에서 C^1-급의 정칙호로서 연장될 수 있음을 보여라.

8.45 S가 연결, 가부호적 단순곡명리가 할 때, S에서 각 $\mathscr{I}_i(i=1,2)$에 대하여

(i) $\mathscr{I}_i$는 하나의 기저이다.

(ii) $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u,v)$와 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^*(\theta,\phi)$가 $\mathscr{I}_i$안에 있으면 공통부분에서는 $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(\theta,\phi)}>0$이다.

(iii) $\mathscr{I}_i$는 극대이다. 즉, S안의 어떤 좌표조각사상이 $\mathscr{I}_i$에 첨가되어 있으면 (ii)는 성립하지 않는다.

를 만족하는 공집합이 아니고 서로소인 $\mathscr{I}_1$, $\mathscr{I}_2$에로의 모든 좌표조각사상들의 집합체(collection)의 유일한 분할(partition)이 존재함을 증명하여라.

제9장

9.34 곡선 $y = y(s)$에의 접선곡면 $x = y(s) + ut(s)$ 위에 제1기본형식은 $I = (1 + u^2\kappa^2)ds^2 + dsdu + du^2$ 으로 주어짐을 보여라.

〈풀이〉 $x_s = y' + ut' = t + u\kappa n \qquad x_u = t$

$$E = (t + u\kappa n)\cdot (t + u\kappa n) = 1 + u^2\kappa^2 \qquad F = (t + u\kappa n)\cdot t = 1 \qquad G = t\cdot t = 1$$

$$I = Eds^2 + 2Fdsds + Gds^2 = (1 + u^2\kappa^2)ds^2 + 2dsdu + du^2$$

9.35. Monge좌표조각사상 $x = ue_1 + ve_2 + f(u,v)e_3$ 위에서 매개변수곡선이 서로 수직인 곡선족이기 위한 필요충분조건은 $f_u f_v \equiv 0$ 임을 보여라.

〈풀이〉 u,v-매개변수곡선이 수직이므로 $x_u \perp x_v$ 이다. 그리고 $\alpha = \measuredangle(x_u, x_v)$이라 하자.

$$x_u = (1,0,f_u) \qquad x_v = (0,1,f_v) \qquad \cos\alpha = \frac{x_u \bullet x_v}{|x_u|\,|x_v|} = \frac{f_u f_v}{\sqrt{1+{f_u}^2}\sqrt{1+{f_v}^2}}$$

$x_u \perp x_v$ 이므로 $\alpha = \frac{\pi}{2}$, 따라서 $f_u f_v = 0$

9.37. 곡선 $y = y(s)$의 종법선 $b(s)$에 의하여 생성되는 곡면 $x = y(s) + ub(s)$의 제1기본형식은 $I = (1 + u^2\tau^2)ds^2 + du^2$임을 보여라.

〈풀이〉 $x_s = y' + ub' = t - u\tau n \qquad x_u = b$

$$E = (t - u\tau n)\cdot (t - u\tau n) = 1 + u^2\tau^2 \qquad F = (t - u\tau n)\cdot b = 0 \qquad G = b\cdot b = 1$$

$$I = Eds^2 + 2Fdsdu + Gdu^2 = (1 + u^2\tau^2)ds^2 + du^2$$

9.38. 구면 $x = (\sin\phi\cos\theta)e_1 + (\sin\phi\sin\theta)e_2 + (\cos\phi)e_3$ 위에서, 호 $\phi = \int_{\frac{\pi}{4}}^{t} \frac{1}{\sin\tau}d\tau, \phi = t, \frac{\pi}{4} \le t \le \frac{\pi}{2}$의 길이를 구하여라.

〈풀이〉 $x_\theta = (-\sin\phi\sin\theta, \sin\phi\cos\theta, 0) \qquad x_\phi = (\cos\phi\cos\theta, \cos\phi\sin\theta, -\sin\phi)$

$$E = x_\theta\cdot x_\theta = \sin^2\phi \qquad F = x_\theta\cdot x_\phi = 0 \qquad G = x_\phi\cdot x_\phi = 1$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{\frac{\pi}{4}}^{t}\frac{1}{\sin t}dt = \frac{1}{\sin t} \qquad \frac{d\phi}{dt} = 1$$

$$I = E\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + 2F\frac{d\theta}{dt}\frac{d\phi}{dt} + G\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 = 2$$

$$s = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{I}dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2}\,dt = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi$$

9.39. Monge좌표조각사상 $x = ue_1 + ve_2 + f(u,v)e_3$ 위에서, 곡면의 넓이는 적분

$A=\int\int_W \sqrt{1+f_u^{\ 2}+f_v^{\ 2}}\,dudv$ 로 주어짐을 보여라.

〈풀이〉 $\boldsymbol{x_u}=(1,0,f_u)$ $\quad\boldsymbol{x_v}=(0,1,f_v)$

$E=\boldsymbol{x_u}\cdot\ \boldsymbol{x_u}=1+f_u^{\ 2}\quad F=\boldsymbol{x_u}\cdot\ \boldsymbol{x_v}=f_uf_v\quad G=\boldsymbol{x_v}\cdot\ \boldsymbol{x_v}=1+f_v^{\ 2}\quad EG-F^2=1+f_u^{\ 2}+f_v^{\ 2}$

$$A=\int\int_W \sqrt{EG-F^2}\,dudv=\int\int_W\sqrt{1+f_u^{\ 2}+f_v^{\ 2}}\,dudv$$

9.40. 한 곡면 위의 두 좌표조각사상 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u,v)$와 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^*(\theta,\phi)$의 공통부분에서는

$EG-F^2=(E^*G^*-F^{*2})[\frac{\partial(\theta,\phi)}{\partial(u,v)}]^2$ 임을 증명하여라.

〈풀이〉 E,F,G을 좌표조각사상 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u,v)$의 제1기본계수, E^*,F^*,G^*을 좌표조각사상 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^*(\theta,\phi)$의 제1기본계수라 하자.

$$\begin{aligned}E=\boldsymbol{x_u}\cdot\ \boldsymbol{x_u}&=(\boldsymbol{x_\theta^*}\theta_u+\boldsymbol{x_\phi^*}\phi_u)\cdot\ (\boldsymbol{x_\theta^*}\theta_u+\boldsymbol{x_\phi^*}\phi_u)=\boldsymbol{x_\theta^*}\cdot\ \boldsymbol{x_\theta^*}\theta_u^{\ 2}+2\boldsymbol{x_\theta^*}\cdot\ \boldsymbol{x_\phi^*}\theta_u\phi_u+\boldsymbol{x_\phi^*}\cdot\ \boldsymbol{x_\phi^*}\phi_u^{\ 2}\\&=E^*\theta_u^{\ 2}+2F^*\theta_u\phi_u+G^*\phi_u^{\ 2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F=\boldsymbol{x_u}\cdot\ \boldsymbol{x_v}&=(\boldsymbol{x_\theta^*}\theta_u+\boldsymbol{x_\phi^*}\phi_u)\cdot\ (\boldsymbol{x_\theta^*}\theta_v+\boldsymbol{x_\phi^*}\phi_v)=\boldsymbol{x_\theta^*}\cdot\ \boldsymbol{x_\theta^*}\theta_u\theta_v+\boldsymbol{x_\theta^*}\cdot\ \boldsymbol{x_\phi^*}(\theta_u\phi_v+\theta_v\phi_u)+\boldsymbol{x_\phi^*}\cdot\ \boldsymbol{x_\phi^*}\phi_u\phi_v\\&=E^*\theta_u\theta_v+F^*(\theta_u\phi_v+\theta_v\phi_u)+G^*\phi_u\phi_v\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}G=\boldsymbol{x_v}\cdot\ \boldsymbol{x_v}&=(\boldsymbol{x_\theta^*}\theta_v+\boldsymbol{x_\phi^*}\phi_v)\cdot\ (\boldsymbol{x_\theta^*}\theta_v+\boldsymbol{x_\phi^*}\phi_v)=\boldsymbol{x_\theta^*}\cdot\ \boldsymbol{x_\theta^*}\theta_v^{\ 2}+2\boldsymbol{x_\theta^*}\cdot\ \boldsymbol{x_\phi^*}\theta_v\phi_v+\boldsymbol{x_\phi^*}\cdot\ \boldsymbol{x_\phi^*}\phi_v^{\ 2}\\&=E^*\theta_v^{\ 2}+2F^*\theta_v\phi_v+G^*\phi_v^{\ 2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}EG-F^2&=(E^*\theta_u^{\ 2}+2F^*\theta_u\phi_u+G^*\phi_u^{\ 2})(E^*\theta_v^{\ 2}+2F^*\theta_v\phi_v+G^*\phi_v^{\ 2})-(E^*\theta_u\theta_v+F^*(\theta_u\phi_v+\theta_v\phi_u)+G^*\phi_u\phi_v)^2\\&=E^*G^*(\theta_u^{\ 2}\phi_v^{\ 2}-2\theta_u\theta_v\phi_u\phi_v+\theta_v^{\ 2}\phi_u^{\ 2})-F^{*2}(\theta_u^{\ 2}\phi_v^{\ 2}-2\theta_u\theta_v\phi_u\phi_v+\theta_v^{\ 2}\phi_u^{\ 2})\\&=(E^*G^*-F^*)(\theta_u\phi_v-\theta_v\phi_u)^2\\&=(E^*G^*-F^*)[\frac{\partial(\theta,\phi)}{\partial(u,v)}]\end{aligned}$$

9.41. $(u^2+a^2)d\theta^2-du^2=0$을 만족하는 곡면 $\boldsymbol{x}=(u\cos\theta)\boldsymbol{e_1}+(u\sin\theta)\boldsymbol{e_2}+(a\theta+b)\boldsymbol{e_3}$ 위의 곡선들은 직교곡선족인 것을 보여라.

〈풀이〉

9.42. 곡면 $\boldsymbol{x}=(r\cos\theta)\boldsymbol{e_1}+(r\sin\theta)\boldsymbol{e_2}+f(\theta)\boldsymbol{e_3}$ 위의 θ-매개변수곡선은 평행한 것을 보여라.

〈풀이〉

9.43. Monge좌표조각사상 $\boldsymbol{x}=u\boldsymbol{e_1}+v\boldsymbol{e_2}+f(u,v)\boldsymbol{e_3}$ 위에서 제2기본형식은

$\mathrm{II}=(f_u^{\ 2}+f_v^{\ 2}+1)^{-\frac{1}{2}}[f_{uu}du^2+2f_{uv}dudv+f_{vv}dv^2]$ 인 것을 보여라.

〈풀이〉

$\boldsymbol{x}_u=(1,0,f_u) \quad \boldsymbol{x}_v=(0,1,f_v) \quad \boldsymbol{x}_{uu}=(0,0,f_{uu}) \quad \boldsymbol{x}_{uv}=(0,0,f_{uv}) \quad \boldsymbol{x}_{vv}=(0,0,f_{vv})$

$\boldsymbol{x}_u\times\boldsymbol{x}_v=(-f_u,-f_v,1) \qquad \boldsymbol{N}=\dfrac{\boldsymbol{x}_u\times\boldsymbol{x}_v}{|\boldsymbol{x}_u\times\boldsymbol{x}_v|}=(f_u{}^2+f_v{}^2+1)^{-\frac{1}{2}}(-f_u,-f_v,1)$

$L=\boldsymbol{x}_{uu}\cdot\boldsymbol{N}=(f_u{}^2+f_v{}^2+1)^{-\frac{1}{2}}f_{uu} \qquad M=\boldsymbol{x}_{uv}\cdot\boldsymbol{N}=(f_u{}^2+f_v{}^2+1)^{-\frac{1}{2}}f_{uv}$

$N=\boldsymbol{x}_{vv}\cdot\boldsymbol{N}=(f_u{}^2+f_v{}^2+1)^{-\frac{1}{2}}f_{vv}$

$\mathrm{II}=Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2=(f_u{}^2+f_v{}^2+1)^{-\frac{1}{2}}(f_{uu}du^2+2f_{uv}dudv+f_{vv}dv^2)$

9.44. 상나선 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}(s)+u\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{g}=$상수 위의 모든 점은 포물점이거나 평탄점임을 보여라.

〈풀이〉 $\boldsymbol{x}_s=\boldsymbol{y}'=\boldsymbol{t} \quad \boldsymbol{x}_u=\boldsymbol{g} \quad \boldsymbol{x}_{ss}=\boldsymbol{t}'=\kappa\boldsymbol{n} \quad \boldsymbol{x}_s u=0 \quad \boldsymbol{x}_{uu}=0$

$L=\boldsymbol{x}_{ss}\cdot\boldsymbol{N}=\kappa\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{N}=\kappa\cos\alpha \ \ (\alpha=\measuredangle(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{N})) \qquad M=\boldsymbol{x}_s u\cdot\boldsymbol{N}=0 \qquad N=\boldsymbol{x}_{uu}\cdot\boldsymbol{N}=0$

$LN-M^2=\kappa\cos\alpha\cdot 0=0$

따라서, $\boldsymbol{x}$상의 모든 점(u,v)은 포물점이거나 평탄점이다.

특히, $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$이면 $L=M=N=0$ 평탄점, $0\leqq\alpha<\dfrac{\pi}{2}$이면 $L=\kappa\cos\alpha\neq 0 \quad M=N=0$ 포물점

9.45. $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u,v)$와 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^*(\theta,\phi)$가 공통부분에서 $\partial(\theta,\phi)/\partial(u,v)>0$을 만족하는 곡면 위의 조표조각사상이라 할 때, 제2기본계수는

$$L=L^*\theta_u{}^2+2M^*\theta_u\phi_u+N^*\phi_u{}^2$$
$$M=L^*\theta_u\theta_v+M^*(\theta_u\phi_v+\phi_u\theta_v)+N^*\phi_u\phi_v$$
$$N=L^*\theta_v{}^2+2M^*\theta_v\phi_v+N^*\phi_v{}^2$$

과 같이 변환됨을 보여라.

〈풀이〉 $\boldsymbol{x}_u=\boldsymbol{x}^*_\theta\theta_u+\boldsymbol{x}^*_\phi\phi_u \quad \boldsymbol{x}_v=\boldsymbol{x}^*_\theta\theta_v+\boldsymbol{x}^*_\phi\phi_v \quad \boldsymbol{N}_u=\boldsymbol{N}^*_\theta\theta_u+\boldsymbol{N}^*_\phi\phi_u \quad \boldsymbol{N}_v=\boldsymbol{N}^*_\theta\theta_v+\boldsymbol{N}^*_\phi\phi_v$ 이라 하자.

$$\begin{aligned}L&=-\boldsymbol{x}_u\cdot\boldsymbol{N}_u=-(\boldsymbol{x}^*_\theta\theta_u+\boldsymbol{x}^*_\phi\phi_u)\cdot(\boldsymbol{N}^*_\theta\theta_u+\boldsymbol{N}^*_\phi\phi_u)\\&=-\boldsymbol{x}^*_\theta\cdot\boldsymbol{N}^*_\theta\theta_u{}^2-\boldsymbol{x}^*_\theta\cdot\boldsymbol{N}^*_\phi\theta_u\phi_u-\boldsymbol{x}^*_\phi\cdot\boldsymbol{N}^*_\theta\theta_u\phi_u-\boldsymbol{x}^*_\phi\cdot\boldsymbol{N}^*_\phi\phi_u{}^2\\&=L^*\theta_u{}^2+2M^*\theta_u\phi_u+N^*\phi_u{}^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M&=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}_u\cdot\boldsymbol{N}_v+\boldsymbol{x}_v\cdot\boldsymbol{N}_u)=-\frac{1}{2}\{(\boldsymbol{x}^*_\theta\theta_u+\boldsymbol{x}^*_\phi\phi_u)\cdot(\boldsymbol{N}^*_\theta\theta_v+\boldsymbol{N}^*_\phi\phi_v)+(\boldsymbol{x}^*_\theta\theta_v+\boldsymbol{x}^*_\phi\phi_v)\cdot(\boldsymbol{N}^*_\theta\theta_u+\boldsymbol{N}^*_\phi\phi_u)\}\\&=-\frac{1}{2}(-2L^*\theta_u\theta_v-2M^*\theta_u\phi_v-2M^*\theta_v\phi_u-2N^*\phi_u\phi_v)\\&=L^*\theta_u\theta_v+M^*(\theta_u\phi_v+\theta_v\phi_u)+N^*\phi_u\phi_v\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}N&=-\boldsymbol{x}_v\cdot\boldsymbol{N}_v=-(\boldsymbol{x}^*_\theta\theta_v+\boldsymbol{x}^*_\phi\phi_v)\cdot(\boldsymbol{N}^*_\theta\theta_v+\boldsymbol{N}^*_\phi\phi_v)\\&=-\boldsymbol{x}^*_\theta\cdot\boldsymbol{N}^*_\theta\theta_v{}^2-\boldsymbol{x}^*_\theta\cdot\boldsymbol{N}^*_\phi\theta_v\phi_v-\boldsymbol{x}^*_\phi\cdot\boldsymbol{N}^*_\theta\theta_v\phi_v-\boldsymbol{x}^*_\phi\cdot\boldsymbol{N}^*_\phi\phi_v{}^2\\&=L^*\theta_v{}^2+2M^*\theta_v\phi_v+N^*\phi_v{}^2\end{aligned}$$

9.46. $u=1, v=1$에 대응하는 점에서 $\boldsymbol{x}=(u+v)\boldsymbol{e}_1+(u-v)\boldsymbol{e}_2+uv\boldsymbol{e}_3$위의 가우스곡률과 평균곡률은 $K=1/16$, $H=1/8\sqrt{2}$ 임을 보여라.

〈풀이〉 $\boldsymbol{x}_u=(1,1,v)$ $\quad$ $\boldsymbol{x}_v=(1,-1,u)$ $\quad$ $\boldsymbol{N}=(2u^2+2v^2+4)^{-\frac{1}{2}}(u+v,-u+v,-2)$

$\boldsymbol{x}_{uu}=(0,0,0)$ $\quad$ $\boldsymbol{x}_{uv}=(0,0,1)$ $\quad$ $\boldsymbol{x}_{vv}=(0,0,0)$

$E=2+v^2$ $\quad$ $F=uv$ $\quad$ $G=2+u^2$ $\quad$ $L=0$ $\quad$ $M=-2(2u^2+2v^{2+4)}{}^{-\frac{1}{2}}$ $\quad$ $N=0$

$(u,v)=(1,1)$에서 $E=3$ $\quad$ $F=1$ $\quad$ $G=3$ $\quad$ $L=0$ $\quad$ $M=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad$ $N=0$

$$H=\frac{EN+GL=2FM}{2(EG-F^2)}=\frac{1}{8\sqrt{2}} \qquad K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}=-\frac{1}{16}$$

9.47. 회전면 $\boldsymbol{x}=(\cosh u\cos\theta)\boldsymbol{e}_1+(\cosh u\sin\theta)\boldsymbol{e}_2+u\boldsymbol{e}_3$ 위의 각 점에서 평균곡률은 0인 것을 보여라.

〈풀이〉 $\boldsymbol{x}_u=(\sinh u\cos\theta,\sinh u\sin\theta,1)$ $\quad$ $\boldsymbol{x}_\theta=(-\cosh u\sin\theta,\cosh u\cos\theta,0)$

$$\boldsymbol{N}=\frac{1}{\cosh^2u}(-\cosh u\cos\theta,-\cosh u\sin\theta,\sinh u\cosh u)=\frac{1}{\cosh u}(-\cos\theta,-\sin\theta,\sinh u)$$

$\boldsymbol{x}_{uu}=(\cosh u\cos\theta,\cosh u\sin\theta,0)$ $\quad$ $\boldsymbol{x}_{u\theta}=(-\sinh u\sin\theta,\sinh u\cos\theta,0)$

$\boldsymbol{x}_{\theta\theta}=(-\cosh u\cos\theta,-\cosh u\sin\theta,0)$

$E=\cosh^2u$ $\quad$ $F=0$ $\quad$ $G=\cosh^2u$ $\quad$ $L=-1$ $\quad$ $M=0$ $\quad$ $N=1$

$$H=\frac{EN+GL-2FM}{2(EG-F^2)}=0$$

9.48. 곡면 $x_1\sin x_3-x_2\cos x_3=0$의 주곡률은 $\pm1/({x_1}^2+{x_2}^2+1)$임을 보여라.

〈풀이〉 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_1\tan x_3,x_3)$이라 하자.

$\boldsymbol{x}_{x_1}=(1,\tan x_3,0)$ $\quad$ $\boldsymbol{x}_{x_3}=(0,x_1,\sec^2x_3,1)$ $\quad$ $\boldsymbol{N}=(tan^2x_3+{x_1}^2\sec^4x_3+1)^{-\frac{1}{2}}(\tan x_3,-1,x_1\sec^2x_3)$

$\boldsymbol{x}_{x_1x_1}=(0,0,0)$ $\quad$ $\boldsymbol{x}_{x_1x_3}=(0,\sec^2x_3,0)$ $\quad$ $\boldsymbol{x}_{x_3x_3}=(0,2x_1\sec^2x_3\tan x_3,0)$

$E=1+\tan^2x_3$ $\quad$ $F=x_1\sec^2x_3\tan x_3$ $\quad$ $G=1+{x_1}^2\sec^4x_3$

$L=0$ $\quad$ $M=-(\tan^2x_3+{x_1}^2\sec^4x_3+1)^{-\frac{1}{2}}\sec^2x_3$ $\quad$ $N=-2(\tan^2x_3+{x_1}^2\sec^4x_3+1)^{-\frac{1}{2}}x_1\sec^2x_3\tan x_3$

$EG-F^2={x_1}^2\sec^4x_3+\tan^2x_3+1$ $\quad$ $LN-M^2=-(\tan^2x_3+{x_1}^2\sec^4x_3+1)^{-1}\sec^4x_3$ $\quad$ $EN+GL-2FM=0$

$\kappa^2-(\tan^2x_3+{x_1}^2\sec^4x_3+1)^{-2}\sec^4x_3=0$

$$\kappa=\pm\frac{1}{{x_1}^2+{x_2}^2+1}$$

9.49. 곡면$\boldsymbol{x}=(u\cos\theta)\boldsymbol{e}_1+(u\sin\theta)\boldsymbol{e}_2+u\boldsymbol{e}_3$ 위의 곡률선은$\log(u+\sqrt{u^2+1})-v=C$와 $\log(u+\sqrt{u^2+1})+v=K$ 의 상임을 보여라.

〈풀이〉

9.50. Dupin의 표현을 이용하여 $\boldsymbol{x}=u\boldsymbol{e}_1+v\boldsymbol{e}_2+(4u^2+v^2)\boldsymbol{e}_3$ 위의 $u=0,v=0$에서 주곡률과 주방향을 구하라.

〈풀이〉 $\boldsymbol{x}_u=(1,0,8u)$ $\quad \boldsymbol{x}_v=(0,1,2v)$ $\quad \boldsymbol{N}=(64u^2+4v^2+1)^{-\frac{1}{2}}(-8u,-2v,1)$

$E=1+64u^2 \quad F=16uv \quad G=1+4v^2$

$\boldsymbol{x}_{uu}=(0,0,8) \quad \boldsymbol{x}_{uv}=(0,0,0) \quad \boldsymbol{x}_{vv}=(0,0,2)$

$L=8(64u^2+4v^2+1)^{-\frac{1}{2}} \quad M=0 \quad N=2(64u^2+4v^2+1)^{-\frac{1}{2}}$

$(u,v)=(0,0) \quad \kappa_n=\dfrac{8du^2+2dv^2}{du^2+dv^2}$

$du^2+dv^2=1$이라 하면, $du=\cos\theta, dv=\sin\theta \quad \kappa_n=8\cos^2\theta+2\sin^2\theta=2+6\cos^2\theta$

따라서 x_1-축$(\theta=0)$에서 극대치 $\kappa_1=8$, x_2-축$(\theta=\dfrac{\pi}{2})$에서 극소치 $\kappa_2=2$를 갖는다.

9.51. $Adu+Bdv=0$으로 주어지는 곡선족에 수직인 좌표조각사상 위의 곡선족은 $(EB-FA)du+(FB-GA)dv=0$의 해로써 주어짐을 보여라.

〈풀이〉

9.52. 곡면 $\boldsymbol{x}=e^{(u-v)/2}(\cos\dfrac{u+v}{2})\boldsymbol{e}_1+e^{(u-v)/2}(\sin\dfrac{u+v}{2})\boldsymbol{e}_2+(\dfrac{u-v}{2})\boldsymbol{e}_3$ 위의 매개변수곡선은 점근곡선이다. 이때, $u-$매개변수곡선, $v=0$을 따라서 열률은 $\tau^2=-K$를 만족함을 보여라.

〈풀이〉

9.53. 곡면 $x_3-x_1{}^4+x_2{}^4=0$ 위의 점근곡선은 이 곡면과 주면족 $x_1{}^2+x_2{}^2+C$ 와 $x_1{}^2-x_2{}^2=K$ 의 공통 부분인 것을 보여라.

〈풀이〉 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_1{}^4-x_2{}^4)$ $\quad \boldsymbol{x}_{x_1}=(1,0,4x_1{}^3)$ $\quad \boldsymbol{x}_{x_2}=(0,1,-4x_2{}^3)$

$\boldsymbol{N}=(16x_1{}^6+16x_2{}^6+1)^{-\frac{1}{2}}(-4x_1{}^3,4x_2{}^3,1)$

$\boldsymbol{x}_{x_1x_1}=(0,0,12x_1{}^2) \quad \boldsymbol{x}_{x_1x_2}=(0,0,0) \quad \boldsymbol{x}_{x_2x_2}=(0,0,-12x_2{}^2)$

$L=12x_1{}^2(16x_1{}^6+16x_2{}^6+1)^{-\frac{1}{2}} \quad M=0 \quad N=-12x_2{}^2(16x_1{}^6+16x_2{}^6+1)^{-\frac{1}{2}}$

$12x_1{}^{2(16x_16}+16x_2{}^6+1)^{-\frac{1}{2}}dx_1{}^2-12x_2{}^2(16x_1{}^6+16x_2{}^6+1)^{-\frac{1}{2}}dx_2{}^2=0$

$x_1{}^2dx_1{}^2-x_2{}^2dx_2{}^2=0 \quad i.e \quad x_1dx_1-x_2dx_2=0 \quad x_1dx_1+x_2dx_2=0$

$\therefore x_1{}^2-x_2{}^2=K \quad x_1{}^2+x_2{}^2=C$

9.54. 곡률방향은 점근방향을 이등분함을 증명하여라.

〈풀이〉

9.55. 점근곡선이 직교곡선족인 곡면 위에서는 평균곡률이 0임을 보여라.

〈풀이〉 $\boldsymbol{x}=u\boldsymbol{e}_1+v\boldsymbol{e}_2+f(u,v)\boldsymbol{e}_3$ 이라 하자.

$$E=1 \qquad F=0 \qquad G=1 \qquad Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2=0$$

$$du=\frac{-M\pm\sqrt{M^2-LN}}{L}dv$$

점근곡선이 직교하므로,

$$-1=\frac{-M+\sqrt{M^2-LN}}{L}\cdot\frac{-M-\sqrt{M^2-LN}}{L}=\frac{N}{L} \qquad i.e \quad N=-L$$

$$EN+GL-2FM=N+L=0 \qquad \therefore \quad H=0$$

9.56. 구면이나 평면이 한 곡면과 일정각으로 만날 때, 그 공통부분인 곡선은 곡률선임을 증명하여라.

〈풀이〉 구면상의 모든 점은 타원제점이고, 평면상의 모든 점은 포물제점이므로 모든 방향이 주방향이 된다. 따라서, 공통부분인 곡선은 구면인 평면의 곡률선이 된다.

일정각으로 교차하므로, $\boldsymbol{N}_1$(구면이나 평면의 법벡터)와 $\boldsymbol{N}_2$(한 곡면의 법벡터)에 대해,

$\boldsymbol{N}_1\cdot\boldsymbol{N}_2=$상수

따라서 $0=\dfrac{d}{dt}(\boldsymbol{N}_1\cdot\boldsymbol{N}_2)=\dfrac{d\boldsymbol{N}_1}{dt}\cdot\boldsymbol{N}_2+\boldsymbol{N}_1\cdot\dfrac{d\boldsymbol{N}_2}{dt}$

Rodrigues의 공식에 의해 $\dfrac{d\boldsymbol{N}_1}{dt}=-\kappa_1\dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt}$ 따라서 $-\kappa_1\dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt}\cdot\boldsymbol{N}_2+\boldsymbol{N}_1\cdot\dfrac{d\boldsymbol{N}_2}{dt}=0$

$\dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt}\perp\boldsymbol{N}_2$ 이므로, $\dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt}\cdot\boldsymbol{N}_2=0$ 따라서 $\boldsymbol{N}_1\cdot\dfrac{d\boldsymbol{N}_2}{dt}=0$ $\quad i.e \quad \dfrac{d\boldsymbol{N}_2}{dt}\perp\boldsymbol{N}_1$

$\dfrac{d\boldsymbol{N}_2}{dt}\perp\boldsymbol{N}_2$ 이므로, $\dfrac{d\boldsymbol{N}_2}{dt}$와 $\dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt}$ $\quad \dfrac{d\boldsymbol{N}_2}{dt}=-\kappa_2\dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt}$ 인 κ_2 가 존재한다.

따라서, 공통부분은 한 곡면의 곡률선이다.

9.57. 어느 직교방향의 짝으로 곡면 위의 한 점에서 법곡률의 합은 상수임을 증명하여라.

〈풀이〉

9.58. 어떤 곡선이 직선이 아닌 평면점근곡선의 1-매개변수족을 가질 때, 이 곡면은 평면임을 증명하여라.

〈풀이〉

9.59. R을 곡면 위의 한 좌표조각사상 위의 영역일 하자. R안의 단위법선의 끝점은 R의 구면상이라 불리는 단위구면 위에 한 집합 R'를 만든다. R의 넓이에 대한 R'의 넓이의 비는 R이 점 P로 줄어들 때, 점 P에서 $|K|$에 가까워짐을 보여라.

〈풀이〉

9.60. 곡면위의 한 점 P에서 $K \neq 0$일 때, 점들이 그들 근방의 구면상과 1-1대응시킬 수 있는 점 P의 근방이 존재함을 보여라.

〈풀이〉

9.61. 일엽쌍곡면 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$의 매개변수표현을 구하고 그의 가우스곡률과 평균곡률을 구하여라.

〈풀이〉

제10장

10.28. 주면 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}(u)+v\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{g}$=상수, $|\boldsymbol{g}|=1$에 대한 Christoffel의 기호 Γ_{ij}^{k} 를 구하라.

〈풀이〉

$$\boldsymbol{x_u}=\boldsymbol{y}'(u) \qquad \boldsymbol{x_v}=\boldsymbol{g} \qquad \boldsymbol{E}=\boldsymbol{y}'\cdot\boldsymbol{y}' \qquad F=\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{y}' \qquad G=\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{g}=1 \qquad EG-F^2=|\boldsymbol{y}'\times\boldsymbol{g}|^2$$

$$E_u=2\boldsymbol{y}'\cdot\boldsymbol{y}'' \qquad E_v=0 \qquad F_u=\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{y}'' \qquad F_v=0 \qquad G_u=0 \qquad G_v=0$$

$$\Gamma_{11}^1=\frac{\geq{}_v-2FF_u+FE_v}{2(EG-F^2)}=\frac{(\boldsymbol{y}'\times\boldsymbol{g})\cdot(\boldsymbol{y}''\times\boldsymbol{g})}{|\boldsymbol{y}'\times\boldsymbol{g}|^2}$$

$$\Gamma_{11}^2=\frac{2EF_u-EE_v-FE_u}{2(EG-F^2)}=\frac{(\boldsymbol{y}'\times\boldsymbol{g})\cdot(\boldsymbol{y}'\times\boldsymbol{y}'')}{|\boldsymbol{y}'\times\boldsymbol{g}|^2}$$

$$\Gamma_{12}^1=\frac{\geq{}_v-FG_u}{2(EG-F^2)}=0 \qquad \Gamma_{12}^2=\frac{EG_u-FE_v}{2(EG-F^2)}=0$$

$$\Gamma_{22}^1=\frac{2GF_v-GG_u-FG_v}{2(EG-F^2)}=0 \qquad \Gamma_{22}^2=EG_v-2FF_v+FG$$

10.29. 함수

$$E=1+4u^2, F=-4uv, G=1+4v^2, L=2(4u^2+4v^2+1)^{-\frac{1}{2}}, M=0, N=-2(4u^2+4v^2+1)^{-\frac{1}{2}}$$

는 경용조건 (10.7)과 (10.8)을 만족하고 있음을 증명하여라.

〈풀이〉 $E_u=8u \qquad F_u=-4v \qquad G_u=0 \qquad M_u=0 \qquad N_u=8u(4u^2+4v^2+1)^{-\frac{3}{2}}$

$$E_v=0 \qquad F_v=-4u \qquad G_v=8v \qquad M_v=0 \qquad L_v=-8v(4u^2+4v^2+1)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\Gamma_{11}^1=\frac{4u}{4u^2+4v^2+1} \qquad \Gamma_{11}^2=\frac{-4v}{4u^2+4v^2+1} \qquad \Gamma_{12}^1=0$$

$$\Gamma_{22}^1=\frac{-4u}{4u^2+4v^2+1} \qquad \Gamma_{22}^2=\frac{4v}{4u^2+4v^2+1} \qquad \Gamma_{12}^2=0$$

$$L_v-M_u=-8v(4u^2+4v^2+1)^{-\frac{3}{2}}$$

$$L\Gamma_{12}^1+M(\Gamma_{12}^2-\Gamma_{11}^1)-N\Gamma_{11}^2=2(4u^2+4v^2+1)^{-\frac{1}{2}}(-4v)(4u^2+4v^2+1)^{-1}=-8v(4u^2+4v^2+1)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\therefore \quad L_v-M_u=L\Gamma_{12}^1+M(\Gamma_{12}^2-\Gamma_{11}^1)-N\Gamma_{11}^2$$

$$M_v-N_u=-8u(4u^2+4v^2+1)^{-\frac{3}{2}}$$

$$L\Gamma_{22}^1+M(\Gamma_{22}^2-\Gamma_{12}^1)-N\Gamma_{12}^2=2(4u^2+4v^2+1)^{-\frac{1}{2}}(-4u)(4u^2+4v^2+1)^{-1}=-8u(4u^2+4v^2+1)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\therefore \quad M_v-N_u=L\Gamma_{22}^1+M(\Gamma_{22}^2-\Gamma_{12}^1)-N\Gamma_{12}^2$$

$$LN-M^2=2(4u^2+4v^2+1)^{-\frac{1}{2}}(-2)(4u^2+4v^2+1)^{-\frac{1}{2}}=-4(4u^2+4v^2+1)^{-1}$$

$$F[(\Gamma_{22}^2)_u-(\Gamma_{12}^2)_v+\Gamma_{22}^1\Gamma_{11}^2-\Gamma_{12}^1\Gamma_{12}^2]+E[(\Gamma_{22}^1)_u-(\Gamma_{12}^1)_v+\Gamma_{22}^1\Gamma_{11}^1+\Gamma_{22}^2\Gamma_{12}^1-\Gamma_{12}^1\Gamma_{12}$$

10.30. Weingarten의 공식을 이용하여 $\boldsymbol{N_u}\times\boldsymbol{N_v}=\sqrt{EG-F^2}\,K\boldsymbol{N}$임을 증명하여라.

〈풀이〉 $\boldsymbol{N_u}\times\boldsymbol{N_v}=(\beta_1^1\boldsymbol{x_u}+\beta_1^2\boldsymbol{x_v})\times(\beta_2^1\boldsymbol{x_u}+\beta_2^2\beta_v)$

$$= \frac{(LN-M^2)(EG-F^2)}{(EG-F^2)^2}\boldsymbol{x}_u \times \boldsymbol{x}_v = Kboldx_u \times \boldsymbol{x}_v$$
$$= \sqrt{EG-F^2}\,K\frac{\boldsymbol{x}_u \times \boldsymbol{x}_v}{\sqrt{EG-F^2}} = \sqrt{EG-F^2}\,K\boldsymbol{N}$$

10.31. 기본계수가 $E=1,\ F=0, G=1,\ L=-1,\ M=0,\ N=0$인 곡면에 대한 Gauss-Weingarten의 방정식을 풀어라.

〈풀이〉 $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{22}^1 = \Gamma_{22}^2 = 0 \quad \beta_1^1 = 1 \quad \beta_1^2 = \beta_2^1 \quad \beta_2^2 = 0$

$\boldsymbol{x}_{uu} = -\boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{x}_{uv} = 0 \quad \boldsymbol{x}_{vv} = 0 \quad \boldsymbol{N}_u = \boldsymbol{x}_u \quad \boldsymbol{N}_v = 0 \quad \Rightarrow \boldsymbol{x}_{uuu} = -\boldsymbol{N}_u = -\boldsymbol{x}_u$
$\boldsymbol{x}_{uv} = \boldsymbol{a}'\cos u - \boldsymbol{b}'\sin u = 0 \ \Rightarrow \boldsymbol{a}'\cos u = \boldsymbol{b}'\sin u \quad \therefore \boldsymbol{a}' = \boldsymbol{b}' = 0 \ (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}: constant)$
$\boldsymbol{x}_{vv} = \boldsymbol{c}'' = 0 \quad \Rightarrow \boldsymbol{c}' = constant \quad \Rightarrow \boldsymbol{c} = \boldsymbol{d}v \ (\boldsymbol{d} = constant)$
$\therefore \boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}sinu + \boldsymbol{b}cosu + \boldsymbol{d}v$
$1 = E = \boldsymbol{x}_u \cdot \boldsymbol{x}_u = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}cos^2u - 2\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}sinu\cos u + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b}sin^2u \quad \Rightarrow \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b} = 1 \quad \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$
$0 = F = \boldsymbol{x}_u \cdot$

따라서, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{d}$ 는 정규직교벡터가 되고, $\boldsymbol{x}$는 반지름이 1인 실린더가 된다.

10.32. Weingarten의 방정식으로부터 Rodrigues의 공식을 유도하여라.

〈풀이〉 $d\boldsymbol{N} = \boldsymbol{N}_u du + \boldsymbol{N}_v dv = (\beta_1^1 \boldsymbol{x}_u + \beta_1^2 \boldsymbol{x}_v)du + (\beta_2^1 \boldsymbol{x}_u + \beta_2^2 \boldsymbol{x}_v)dv$

$$= (\frac{MF-LG}{EG-F^2}\boldsymbol{x}_u + \frac{LF-ME}{EG-F^2}\boldsymbol{x}_v)du + (\frac{NF-MG}{EG-F^2}\boldsymbol{x}_u + \frac{MF-\neq}{EG-F^2}\boldsymbol{x}_v)dv$$

$(\frac{MF-LG}{EG-F^2}\boldsymbol{x}_u + \frac{LF-ME}{EG-F^2}\boldsymbol{x}_v) \cdot \boldsymbol{x}_u = -L = -\kappa_1 E = -\kappa_1 \boldsymbol{x}_u \cdot \boldsymbol{x}_u$

$(\frac{NF-MG}{EG-F^2}\boldsymbol{x}_u + \frac{MF-\neq}{EG-F^2}\boldsymbol{x}_v) \cdot \boldsymbol{x}_v = -N = -\kappa_2 G = -\kappa_2 \boldsymbol{x}_v \cdot \boldsymbol{x}_v$ 이므로

따라서 $d\boldsymbol{N} = \boldsymbol{N}_u du + \boldsymbol{N}_v dv = -\kappa_1 \boldsymbol{x}_u du - \kappa_2 \boldsymbol{x}_v dv = -\kappa d\boldsymbol{x}$ 이다.

10.33. 좌표조각사상 위에 매개변수곡선들이 수직이면
$K = -\frac{1}{\sqrt{EG}}[\frac{\partial}{\partial u}(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}) + \frac{\partial}{\partial v}(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v})]$가 성립함을 증명하여라.

〈풀이〉 매개변수곡선들이 수직이므로 $F = \boldsymbol{x}_u \cdot \boldsymbol{x}_v = 0$

$$LN-M^2 = E[(\frac{-GG_u}{2EG})_u - (\frac{\geq_v}{2EG})_v + \frac{-GG_u}{2EG} \cdot \frac{\geq_u}{2EG} + \frac{EG_v}{2EG} \cdot \frac{\geq_v}{2EG} - \frac{\geq_v}{2EG} \cdot \frac{\geq_v}{2EG} - \frac{EG_u}{2EG} \cdot \frac{-GG_u}{2EG}]$$

$$= E[(-\frac{G_u}{2E})_u - (\frac{E_v}{2E})_v - \frac{G_u E_u}{4E^2} + \frac{G_v E_v}{4EG} - \frac{E^2_{v4E^2} + \frac{G^2_{u4EG}]}{}}{}$$

$$= \frac{-2G_{uu}E + G_u E_u}{4E} + \frac{-2E_{vv}E + E_v^2}{4E} + \frac{G_v E_v}{4G} + \frac{G_u^2}{4G}$$

$$= \frac{-2G_{uu}EG + G_u E_u G + G_u E G_u}{4EG} + \frac{-2E_{vv}EG + E_v^2 G + G_v E_v E}{4EG}$$

$$=-\sqrt{EG}\,[\frac{\partial}{\partial u}(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u})+\frac{\partial}{\partial v}(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v})]$$

따라서 $K=\dfrac{LN-M^2}{EG-F^2}=-\dfrac{1}{\sqrt{EG}}\,[\dfrac{\partial}{\partial u}(\dfrac{1}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial\sqrt{G}}{\partial u})+\dfrac{\partial}{\partial v}(\dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial\sqrt{E}}{\partial v})]$

10.36. $f(P)=\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}$ 는 곡면 위의 한 점 P의 연속함수임을 증명하여라.

〈풀이〉 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u,v)$를 점 P_0를 포함하는 좌표조각사상이라 하자.

분명히, $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}$ 는 연속함수이므로 $f(P)=f(\boldsymbol{x}(u,v))$ 는 u와 v에서 연속함수이다.

따라서, 주어진 $\epsilon>0$ 과 $(u,v)\in S_{\delta_1}(u_0,v_0)$에 대해 $|f(\boldsymbol{x}(u,v)-f(\boldsymbol{x}(u_0,v_0))|<\epsilon$ 인 $\delta_1>0$가 존재한다. $S_{\delta_1}(u_0,v_0)$의 상M이 개집합$O(\in E^3)$와 곡면S의 공통부분이므로, $S_\delta(\boldsymbol{x_0})\cap S\subset M$인 E^3안에 $S_\delta(\boldsymbol{x_0})$가 존재한다. 따라서 $\boldsymbol{x}\in S_\delta(\boldsymbol{x_0})\cup S$에 대해 $|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x_0})|<\epsilon$이다.

그러므로, f는 P_0에서 연속이다.

10.37. 주곡률 $\kappa_1(P)$와 $\kappa_2(P)$는 유향곡면 위의 한 점 P의 연속함수임을 증명하여라.

〈풀이〉 곡면S가 유향이므로, 점P를 포함하는 좌표조각사상의 방향에 의존하는 $\kappa_1(P)$는 정의되어 있다. $f(P)=\kappa_1(P)$라 하자. 예제 10.37에 의해, $\kappa_1(P)$는 S위의 P_0에서 연속함수이다.

유사하게, $\kappa_2(P)$ 또한 연속함수가 된다.

10.38. [정리 10.6]을 증명하여라: 모든 점이 평탄점인 급≥ 2인 연결폐곡면은 평면뿐이다.

〈풀이〉 S를 급≥ 2의 연결폐곡면이고 S안의 모든 점들은 제점이라 하자.

그리고 P는 S안의 임의의 점이고 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u,v)$는 점$P$를 포함하는 연결좌표조각사상이라 하자.

평탄점에서 κ=상수=0 이므로 모든 방향은 주방향이 되고, 따라서 매개변수곡선들은 곡률선이 된다.

$\boldsymbol{x}(u,v)$는 C^2-급이고 Rodriguess의 공식에 의해 $\boldsymbol{N_{uv}}=-\kappa\boldsymbol{x_{uv}}-\kappa_v\boldsymbol{x_u}$, $\boldsymbol{N_{vu}}=-\kappa\boldsymbol{x_{vu}}-\kappa_u\boldsymbol{x_v}$이고 따라서, $\kappa_v\boldsymbol{x_u}-\kappa_u\boldsymbol{x_v}=0$. 그러나 $\kappa_v=0$, $\kappa_u=0$.

$\boldsymbol{x_u},\boldsymbol{x_v}$ 가 일차독립이므로 S의 모든 점은 $\kappa=0$인 한 좌표조각사상에 속하게 된다.

Q를 S위의 다른 한 점이라 하면, S가 연결이므로 P와 Q를 연결하는 정칙호C: $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t)$가 존재한 다. 또한, S안의 모든 점이 제점이므로 S안의 모든 곡선은 곡률선이 된다.

그때, $\dfrac{d\boldsymbol{N}}{dt}=-\kappa\dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt}=0$이고 따라서 $\boldsymbol{N}=\boldsymbol{C}$=상수.

그러므로 S는 평면이 된다.

10.39. 구면이 양의 Gauss곡률과 평균곡률이 상수인 유일한 연결긴밀곡면임을 증명하여라.

〈풀이〉 S를 $K>0$인 연결긴밀곡면이라 하고, $f(P)=[\kappa_1(P)-\kappa_2(P)]^2$를 생각해 보자.

문제 10.8 에 의해, $f(P)$는 S에서 연속이다.

S가 긴밀하므로 f 는 S위의 적당한 P_0에서 하나의 절대극대를 갖는다.

P_0에서 $f>0$이라 가정하자. f 는 P_0에서 연속이므로 어떤 $S(P_0)$에서 $f>0$이다.

그리고 $S(P_0)$에서 $f=(\kappa_1-\kappa_2)^2>0$이므로 $\kappa_1 \neq \kappa_2$이다. 또한, $K=\kappa_1\kappa_2>0$이므로 κ_1와 κ_2는 S에서 같은 부호를 갖는다. $S(P_0)$에서 $\kappa_1>\kappa_2>0$이라 하면 $\kappa_1-\kappa_2>0$이고 $\kappa_1-\kappa_2$는 P_0에서 국소극대를 갖는다. $K=\kappa_1\kappa_2=$상수 이므로 κ_1는 P_0에서 국소극대를 갖고 κ_2는 P_0에서 국소극소를 갖는다.

Hilbert의 보조정리에 의해, $K \leqq 0$. 이것은 S위에서 $K>0$이라는 사실에 모순이 된다. 따라서 $f \ngtr 0$.

그러나 f 는 P_0에서 극대를 갖고 모든 점P에서 $f(P) \geqq 0$. S위에서 $f \equiv 0$. 따라서 S안의 각각의 점 P에 대해 $\kappa_1=\kappa_2$이다. 그리고 $K>0$이므로 각각의 점P에서 법곡률$\kappa=$상수$\neq 0$이다. 즉, S안의 모든 점은 구면제점이 된다. 정리 10. 5에 의해, S는 오직 구면이 된다.

제11장

11.34. 만일 S가 긴밀곡면이고 f 가 S에서 곡면 S^* 위에로의 정칙미분가능사상이라면, S^*도 긴밀곡면인 것을 증명하여라.

〈풀이〉 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u,v)$ 를 U위에서 정의된 S위의 좌표조각사상이라 하자. 문제 11.1에 의해 f 는 연속이다. S가 긴밀곡면이므로, 문제 6.24에 의해 $S^*=f(S)$ 는 긴밀곡면이다.

11.35. [정리 11.2]를 증명하여라: 만일 f 가 S에서 S^*에로의 C^r-급의 정칙미분가능사상이고 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t)$ 가 S위에서 C^r-급의 곡선 C이라면, $\boldsymbol{x}^*=f(\boldsymbol{x}(t))$ 는 S^*위에서 C^r-급의 정칙곡선이다.

〈풀이〉 곡선C : $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t)$ 를 U위에서 정의된 S위의 C^r-급 곡선이라 하자.

문제 11.3의 증명에 의해, $\boldsymbol{x}^*=f(\boldsymbol{x}(t))$ 는 U위에서 정의된 정칙매개변수표현이다.

따라서 $\boldsymbol{x}^*=f(\boldsymbol{x}(t))$ 는 S위의 C에 대하여 C^r-급 정칙곡선이다.

11.36. 구면의 평면 위에로의 입체사영은 등각사상임을 보여라([예제 11.1]을 보라).

$\boldsymbol{x}=(\cos\theta\sin\phi)\boldsymbol{e}_1+(\sin\theta\sin\phi)\boldsymbol{e}_2+(\cos\phi+1)\boldsymbol{e}_3,\quad 0<\theta<\frac{3}{2}\pi,\ \frac{\pi}{2}<\theta<\frac{5}{2}\pi\,(0<\phi<\pi)$ 이라 하자.

$$\boldsymbol{x}_\theta=(-\sin\theta\sin\phi,\cos\theta\sin\phi,0)\qquad \boldsymbol{x}_\phi=(\cos\theta\cos\phi,\sin\theta\cos\phi,-\sin\phi)\qquad E=\sin^2\phi\qquad F=0\qquad G=1$$

$$\boldsymbol{x}^*=f(\boldsymbol{x}(\theta,\phi))=\frac{2}{1-\cos\phi}((\cos\theta\sin\phi)\boldsymbol{e}_1+(\sin\theta\sin\phi)\boldsymbol{e}_2)$$

$$\boldsymbol{x}^*_\theta=\frac{2}{1-\cos\phi}(-\sin\theta\sin\phi,\cos\theta\sin\phi,0)\qquad \boldsymbol{x}^*_\phi=\frac{2}{1-\cos\phi}(-\cos\theta,-\sin\theta,0)$$

$$E^*=\frac{4}{(1-\cos\phi)^2}sin^2\phi\qquad F^*=0\qquad G^*=\frac{4}{(1-\cos\phi)^2}\qquad \therefore\lambda=\frac{4}{(1-\cos\phi)^2}$$

따라서 f 는 등각사상이다.

11.37. 곡면 S에서 곡면 S^* 위에로의 1-1정칙미분가능사상은 S에서 S^* 위에로의 1-1양연속(위상적)사상 임을 증명하여라.

〈풀이〉 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u,v)$ 를 U위에서 정의된 S위의 좌표조각사상이라 하자. 그리고 f : $\boldsymbol{S}\to\boldsymbol{S}^*$를 1-1정칙미분 가능사상이라 하자. 문제 11.1과 11.4에 의해 f 는 1-1양연속이다.

11.38. 곡면 S에서 곡면 S^*에로의 사상 f 가 국소등장사상이기 위한 필요충분조건은 S 위의 모든 좌표조각사상 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u,v)$ 에 대하여 $E=E^*$, $F=F^*$, $G=G^*$인 것을 증명하여라. 단, E,F,G 와 E^*,F^*,G^*는 각각 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u,v)$ 와 $\boldsymbol{x}^*=f(\boldsymbol{x}(u,v))$ 위에서의 제1기본계수이다.

〈풀이〉 f 를 정칙미분가능사상, $\boldsymbol{x}^*=f(\boldsymbol{x}(u,v))$를 정칙매개변수표현이라 하자. 문제 8.12에 의해 $\boldsymbol{x}^*=f(\boldsymbol{x}(u,v))$는 1-1양연속이다. 따라서 f 는 국소적으로 1-1사상이 된다. 정리 11.3에 의해, 증명이 이루어진다.

11.39. Monge좌표조각사상 $\boldsymbol{x}=u\boldsymbol{e}_1+v\boldsymbol{e}_2+f(u,v)\boldsymbol{e}_3$ 위에 측지선의 미분방정식은

$$(1+p^2+q^2)\ddot{u}+pr\dot{u}^2+2ps\dot{u}\dot{v}+pt\dot{v}^2=0$$
$$(1+p^2+q^2)\ddot{v}+qr\dot{u}^2+2qs\dot{u}\dot{v}+qt\dot{v}^2=0$$

임을 보여라. 단, $p=f_u,\ q=f_v,\ v=f_{uu},\ s=f_{uv},\ t=f_{vv}$ 이다.

〈풀이〉 $\boldsymbol{x_u}=(1,0,f_u)\quad \boldsymbol{x_v}=(0,1,f_v)$

$$E=1+{f_u}^2\quad F=f_uf_v\quad G=1+{f_v}^2$$
$$E_u=2f_uf_{uu}\quad F_u=f_{uu}f_v+f_uF_{uv}\quad G_u=2f_vf_{uv}\quad E_v=2f_uf_{uv}\quad F_v=f_{uv}f_v+f_uf_{vv}\quad G_v=2f_vf_{vv}$$
$$\Gamma_{11}^1=\frac{f_uf_{uu}}{1+{f_u}^2+{f_v}^2}=\frac{pr}{1+p^2+q^2}\qquad \Gamma_{11}^2=\frac{f_vf_{uu}}{1+{f_u}^2+{f_v}^2}=\frac{qr}{1+p^2+q^2}$$
$$\Gamma_{12}^1=\frac{f_uf_{uv}}{1+{f_u}^2+{f_v}^2}=\frac{ps}{1+p^2+q^2}\qquad \Gamma_{12}^2=\frac{f_vf_{uv}}{1+{f_u}^2+{f_v}^2}=\frac{qs}{1+p^2+q^2}$$

(11.7)식에 대입하면,

$$\frac{d^2u}{ds^2}+\frac{pr}{1+p^2+q^2}(\frac{du}{ds})^2+\frac{2ps}{1+p^2+q^2}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds}+\frac{pt}{1+p^2+q^2}(\frac{dv}{ds})^2=0$$
$$\frac{d^2v}{ds^2}+\frac{qr}{1+p^2+q^2}(\frac{du}{ds})^2+\frac{2qs}{1+p^2+q^2}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds}+\frac{qt}{1+p^2+q^2}(\frac{dv}{ds})^2=0$$
$$\Rightarrow(1+p^2+q^2)\ddot{u}+pr\dot{u}^2+2ps\dot{u}\dot{v}+pt\dot{v}^2=0$$
$$(1+p^2+q^2)\ddot{v}+qr\dot{u}^2+2qs\dot{u}\dot{v}+qt\dot{v}^2=0$$

11.40. 극좌표로 방정식 (11.7)을 풀어 평면 위에서 측지선을 찾아라.

〈풀이〉

11.41. 방정식 $d\theta=\dfrac{Cadr}{r\sqrt{r^2-C^2}\sqrt{a^2-(r-b)^2}}$ 의 해는 원환면

$$\boldsymbol{x}=(b+asin\phi)(\cos\theta)\boldsymbol{e_1}+(b+asin\phi)(\sin\theta)\boldsymbol{e_2}+(acos\phi)\boldsymbol{e_3}$$

위의 측지선임을 보여라. 단, $r=b+asin\phi$이다.

〈풀이〉 $\boldsymbol{x_\phi}=(acos\phi\cos\theta,acos\phi\sin\theta,-asin\phi)\qquad \boldsymbol{x_\theta}=(-(b+asin\phi)\sin\theta,(b+asin\phi)\cos\theta,0)$

$$E=\boldsymbol{x_\phi}\cdot\boldsymbol{x_\phi}=a^2\quad F=\boldsymbol{x_\phi}\cdot\boldsymbol{x_\theta}=0\quad G=\boldsymbol{x_\theta}\cdot\boldsymbol{x_\theta}=(b+asin\phi)^2$$
$$\Gamma_{11}^1=\Gamma_{12}^1=\Gamma_{11}^2=\Gamma_{22}^2=0\qquad \Gamma_{22}^1=-\frac{1}{a}(b+asin\phi)\cos\phi\qquad \Gamma_{12}^2=\frac{acos\phi}{b+asin\phi}$$

식(11.7)의 둘째 식에 의해, $\dfrac{d^2\theta}{ds^2}+\dfrac{2acos\phi}{b+asin\phi}\dfrac{d\phi}{ds}\dfrac{d\theta}{ds}=0\Rightarrow\dfrac{d^2\theta}{ds^2}=-\dfrac{2acos\phi}{b+asin\phi}\dfrac{d\phi}{ds}\dfrac{d\theta}{ds}$

$\dfrac{d\theta}{ds}=u$ 라 하면 $\dfrac{1}{u}\dfrac{du}{ds}=-\dfrac{2acos\phi}{b+asin\phi}\dfrac{d\phi}{ds}\Rightarrow\log u=-2\log(b+asin\phi)+K$

따라서, $u=\dfrac{d\theta}{ds}=\dfrac{C}{(b+asin\phi)^2}\quad(C=e^K)$

그리고

$$1+a^2(\frac{d\phi}{ds})^2+(b+asin\phi)^2(\frac{d\theta}{ds})^2=a^2(\frac{d\phi}{ds})^2+\frac{C^2}{(b+asin\phi)^2}\Rightarrow\frac{d\phi}{ds}=\frac{\sqrt{(b+asin\phi)^2-C^2}}{a(b+asin\phi)}$$

따라서 $\frac{d\theta}{d\phi}=\frac{d\theta}{ds}/\frac{d\phi}{ds}=\frac{Ca}{(b+asin\phi)\sqrt{(b+asin\pi)^2-C^2}}$

그러므로 $d\theta=\frac{Cad\phi}{(b+asin\phi)\sqrt{(b+asin\pi)^2-C^2}}=\frac{Cadr}{r\sqrt{r^2-C^2}\sqrt{a^2-(r-b)^2}}\quad(d\phi=\frac{dr}{acos\phi})$

11.42. Liouville곡면(문제 11.18을 보라) 위의 측지선은

$$\int(U-C)^{-\frac{1}{2}}du\pm\int(V+C)^{-\frac{1}{2}}dv=\text{ 상수},\quad C=\text{ 상수}$$

로 주어지는 것을 보여라.

〈풀이〉 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u,v)$ 를 좌표조각사상, $E=G=U+V,\ F=0$이라 하자.

$$\Gamma_{11}^1=\Gamma_{12}^2=-\Gamma_{22}^1=\frac{U'}{2(U+V)}\qquad\Gamma_{12}^1=-\Gamma_{11}^2=\Gamma_{22}^2=\frac{V'}{2(U+V)}$$

문제 11.18에 의해 $[U(\frac{dv}{ds})^2-V(\frac{du}{ds})^2]/[(\frac{du}{ds})^2+(\frac{dv}{ds})^2]=C$

$$1=|\frac{d\boldsymbol{x}}{ds}|^2=E(\frac{du}{ds})^2+2F(\frac{du}{ds})(\frac{dv}{ds})+G(\frac{dv}{ds})^2=(U+V)[(\frac{du}{ds})^2+(\frac{dv}{ds})^2]$$

$$\Rightarrow(\frac{du}{ds})^2+(\frac{dv}{ds})^2=\frac{1}{U+V}$$

$$C=(U+V)[U(\frac{dv}{ds})^2-V(\frac{du}{ds})^2]\qquad(\frac{du}{ds})^2=\frac{1}{U+V}-(\frac{dv}{ds})^2$$

$$\Rightarrow C=(U+V)[U(\frac{dv}{ds})^2-V(\frac{1}{U+V}-(\frac{dv}{ds})^2)]=(U+V)^2(\frac{dv}{ds})^2-V$$

$$\Rightarrow\frac{dv}{ds}=\pm\frac{\sqrt{V+C}}{U+V}\qquad\frac{du}{ds}=\pm\frac{\sqrt{U-C}}{U+V}$$

$$\Rightarrow\frac{du}{dv}=\frac{du}{ds}/\frac{dv}{ds}=\pm\frac{\sqrt{U-C}}{\sqrt{V+C}}\qquad\Rightarrow\frac{du}{\sqrt{U-C}}\pm\frac{dv}{\sqrt{\ }}$$

11.43. $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u,v)$ 를 매개변수곡선들이 수직인 급≥3인 곡면 위의 좌표조각사상이라 하자. 이때,

$$K=\frac{d(\kappa_g)_1}{ds_2}-\frac{d(\kappa_g)_2}{ds_1}-(\kappa_g)_1^2-(\kappa_g)_2^2$$

을 증명하여라. 단, $(\kappa_g)_1$과 $(\kappa_g)_2$는 각각 u와 $v-$매개변수곡선을 따라서 측지(적)곡률이고, s_1과 s_2 는 각각 u와 $v-$매개변수곡선을 따라서 자연매개변수이다.

〈풀이〉 $K=-\frac{1}{\sqrt{EG}}[\frac{\partial}{\partial u}(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u})+\frac{\partial}{\partial v}(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v})]$

$$=-\frac{1}{\sqrt{EG}}[\frac{\partial}{\partial u}(\kappa_g)_2\sqrt{G}-\frac{\partial}{\partial v}(\kappa_g)_1\sqrt{E}]$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial(\kappa_g)_2}{\partial u}\sqrt{G}-\frac{1}{\sqrt{EG}}(\kappa_g)_2\frac{G_u}{2\sqrt{G}}+\frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial(\kappa_g)_1}{\partial v}\sqrt{E}+\frac{1}{\sqrt{EG}}(\kappa_g)_1\frac{E_v}{2\sqrt{E}}$$

$$=-\frac{\partial(\kappa_g)_2}{\partial u}\frac{du}{ds_1}-(\kappa_g)_2^2+\frac{\partial(\kappa_g)_1}{\partial v}\frac{dv}{ds_2}-(\kappa_g)_1^2$$

$$=\frac{d(\kappa_g)_1}{ds_2}-\frac{d(\kappa_g)_2}{ds_1}-(\kappa_g)_1^2-(\kappa_g)_2$$

11.44. P와 Q를 측지(적)좌표조각사상 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u,v)$ 위에 측지선 $v=$ 상수 위의 두 점이라 하자. 이때, P와Q를 연결하는 좌표조각사상 위에 모든 정칙호중에서 P와 Q를 포함하는 측지선의 길이가 가장 짧다는 것을 증명하여라.

〈풀이〉 문제11.21에 의해, $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u,v)$ 에 대해 측지극좌표 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(r,\theta)$ 가 존재한다.
그리고 정리 11.15에 의해 측지선 $v=$상수는 P와 Q사이의 유일한 최소길이호가 된다.
따라서 문제의 결과를 얻는다.

11.45. $u=C_1\cos(v/a)+C_2\sin(v/a)$와 $f(v)=\int\sqrt{1-(du/dv)^2}\,dv$

일 때, 회전면$\boldsymbol{x}=(u cos\theta)\boldsymbol{e_1}+(u sin\theta)\boldsymbol{e_2}+f(v)\boldsymbol{e_3}$ 은 모든 C_1, C_2에 대하여 양상수의 Gauss곡률이 $K=1/a^2$ 인 곡면임을 증명하여라. C_1과 C_2가 얼마일 때 이 곡면은 구면이 될까?

〈풀이〉 $\boldsymbol{x_v}=(\frac{du}{dv}cos\theta,\frac{du}{dv}sin\theta,f'(v))$ $\quad \boldsymbol{x_\theta}=(-u sin\theta, u cos\theta, 0)$

$$E=\boldsymbol{x_v}\cdot\boldsymbol{x_v}=(\frac{du}{dv})^2+f'(v)^2=1 \quad F=\boldsymbol{x_v}\cdot\boldsymbol{x_\theta}=0 \quad G=\boldsymbol{x_\theta}\cdot\boldsymbol{x_\theta}=u^2 \quad \sqrt{EG}=\pm u$$

$$K=-\frac{1}{\sqrt{EG}}[\frac{\partial}{\partial v}(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial v})+\frac{\partial}{\partial\theta}(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial\theta})]$$
$$=-\frac{1}{\sqrt{EG}}[\frac{d}{dv}\frac{d(\pm u)}{dv}]=\mp\frac{1}{u}(\mp\frac{u}{a^2})=\frac{1}{a^2} \qquad \forall\, C_1, C_2$$

식(11.18)에 의해 $\sqrt{G}=C_1\cos(v/a)+C_2\sin(v/a)$ or $\sqrt{G}=C_1\sin(v/a)+C_2\cos(v/a)$

식(11.17)에 의해 $C_1=0,\ C_2=a$ or $C_1=a,\ C_2=0$

11.46. $u=C_1e^{v/a}+C_2e^{-v/a}$, $f(v)=\int\sqrt{1-(du/dv)^2}\,dv$ 일 때, 회전면

$\boldsymbol{x}=(u cos\theta)\boldsymbol{e_1}+(u sin\theta)\boldsymbol{e_2}+f(v)\boldsymbol{e_3}$ 은 음인 상수의 Gauss곡률이 $K=-1/a^2$ 인 곡면임을 증명하 여라.

〈풀이〉 $\boldsymbol{x_v}=(\frac{du}{dv}cos\theta,\frac{du}{dv}sin\theta,f'(v))$ $\quad \boldsymbol{x_\theta}=(-u sin\theta, u cos\theta, 0)$

$$E=(\frac{du}{dv})^2+f'(v)^2=1 \quad F=0 \quad G=u^2 \quad \sqrt{EG}=\sqrt{u^2}=\pm u$$

$$K=-\frac{1}{\sqrt{EG}}[\frac{\partial}{\partial v}(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial v})+\frac{\partial}{\partial\theta}(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial\theta})]$$
$$=-\frac{1}{\sqrt{EG}}[\frac{d^2(\pm u)}{dv^2}]=\mp\frac{1}{u}\frac{1}{dv}(\pm\frac{1}{a})(C_1e^{v/a}-C_2e^{-v/a})$$
$$=-\frac{1}{ua^2}(C_1e^{v/a}+C_2e^{-v/a})=-\frac{1}{a^2}$$

11.47. $\boldsymbol{x}=2(\tanh(r/2)\cos\theta)\boldsymbol{e_1}+2(\tanh(r/2)\sin\theta)\boldsymbol{e_2}$ 는 쌍곡평면의 원점에서 측지(적)극좌표집합임을 증명하여라. [예제 11.9]를 보라.

〈풀이〉 $u=2\tanh\frac{r}{2}$이라 하자. 예제 11.9에 의해,

$$g_{11}=E=\frac{1}{(1-u^2/4)^2} \qquad g_{12}=g_{21}=F=0 \qquad g_{22}=G=\frac{u^2}{(1-u^2/4)^2}$$

$$\Rightarrow K=-1 \qquad \theta=\pm\int\frac{C\sqrt{E}du}{\sqrt{G}\sqrt{G-C^2}}=\pm\int\frac{C(1-u^2/4)du}{u\sqrt{u^2-C^2(1-u^2/4)^2}} \qquad (a=\frac{C}{\sqrt{1+C^2}},v=\frac{a(1+u^2/4)}{u})$$

$$\Rightarrow 1-v^2=[u^2-C^2(1-\frac{u^2}{4})^2]/u^2(1+C^2) \qquad dv=-a(1-\frac{u^2}{4})du/u^2$$

$$\Rightarrow\theta=\mp\int\frac{dv}{\sqrt{1-v^2}} \qquad \therefore u=\cos(\theta-\theta_0)$$

이 때, $u^2+u_0^2-2u_0u\cos(\theta-\theta_0)=\rho^2 \quad (u_0=\frac{2}{a},\rho^2=u_0^2-4)$

$0<\rho<u_0$에서 $u_0^2=\rho^2+4>4$ 인 u_0가 존재하므로 $\boldsymbol{x}$는 측지극좌표집합이다.

11.52. 쌍곡평면 위의 원점에서 점 P까지 본질적 거리를 결정하여라.

〈풀이〉 $\boldsymbol{x}=(u\cos v,u\sin v)$, $P=(u_0\cos v_0,u_0\sin v_0)$ 이라 하자. 예제 11.9에 의해

$$E=\frac{1}{(1-u^2/4)^2} \qquad F=0 \qquad G=\frac{u^2}{(1-u^2/4)^2}$$

$$L(C)=\int_a^b\sqrt{E(\frac{du}{dt})^2+2F(\frac{du}{dt})(\frac{dv}{dt})+G(\frac{dv}{dt})^2}\,dt=\int_a^b\sqrt{E(\frac{du}{dt})^2+G(\frac{dv}{dt})^2}\,dt$$

$$\geqq\int_a^b\sqrt{E(\frac{du}{dt})^2}\,dt=\int_0^{u_0}\frac{1}{1-u^2/4}du=2\tanh^{-1}\frac{u_0}{2} \qquad |P|=u_0$$

$$\therefore D(0,P)=2\tanh^{-1}\frac{|P|}{2}$$

11.53. $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}(s)$을 변곡점이 없는 자연표현된 곡선 C라 하자. $\boldsymbol{n}$이 C의 단위주법선일 때, 선직면 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}(s)+v\boldsymbol{n}(s)$ 가 가전면이기 위한 필요충분조건은 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}(s)$가 평면곡선인 것임을 증명하여라.

〈풀이〉 문제 11.25에 의해, $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}(s)+v\boldsymbol{n}(s)$:developable surface $\Leftrightarrow[\dot{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{n}\dot{\boldsymbol{n}}]=0$

$0=[\dot{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{n}\dot{\boldsymbol{n}}]=\dot{\boldsymbol{y}}\cdot\boldsymbol{n}\times\dot{\boldsymbol{n}}=\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{n}\times(-\kappa\boldsymbol{t}+\tau\boldsymbol{b})=\boldsymbol{t}\cdot(\kappa\boldsymbol{b}+\tau\boldsymbol{t})=\tau \quad\Rightarrow\tau=0$

따라서 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}(s)$ 는 평면곡선이다.

11.54. 가부호적 곡면 S 위에 한 곡선 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}(s)$가 S 위에서 곡률선일 필요충분조건은 $\boldsymbol{N}$이 S의 법선일 때, 선직면 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}(s)+v\boldsymbol{N}(s)$ 가 가전면임을 증명하여라.

〈풀이〉 Rodrigues′ formula에 의해, $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}(s)$:geodesic $\Leftrightarrow d\boldsymbol{N}=-\kappa d\boldsymbol{y}$

이때, $[\dot{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{N}\dot{\boldsymbol{N}}]=\dot{\boldsymbol{y}}\cdot\boldsymbol{N}\times(-\kappa\dot{\boldsymbol{y}})=\kappa(\dot{\boldsymbol{y}}\cdot\dot{\boldsymbol{y}}\times\boldsymbol{N})=\kappa[\dot{\boldsymbol{y}}\dot{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{N}]=0$

따라서 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}(s)+v\boldsymbol{N}(s)$ 는 가전면이다.

11.55. $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}(s)+v\boldsymbol{g}(s)$, $|\boldsymbol{g}|=1$ 이 $\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{y}=0$을 만족하는 가전면이라 하고, $\boldsymbol{n}$이 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}(s)$에 주법선일 때, $\phi(s)=\measuredangle(\boldsymbol{g},\boldsymbol{n})$ 이라 하자. 이때, $\phi=-\tau$ 임을 증명하여라. 단, τ는 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}(s)$를 따라서 열률이다.

〈풀이〉

11.56. 만일 S가 Gauss곡률 $K(=$상수$\neq 0)$인 곡면이라면, 측지적다각형의 넓이는 그의 내각으로써 결정됨을 증명하여라.

〈풀이〉 C가 측지적다각형을 만드는 n개의 측지선, A를 측지적다각형의 넓이라 하자.

C위에서 $\kappa_g = 0$ 이므로, Gauss-Bonnet공식은 $\int\int_R KdS = 2\pi - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ (α_i는 C의 외각)

$\beta_i = \pi - \alpha_i (1 \leqq i \leqq n)$ 을 다각형의 내각이라 하면,

$$\int\int_R KdS = 2\pi - \sum_{i=1}^{n}(\pi - \beta_i) = (2-n)\pi + \sum_{i=1}^{n}\beta_i \quad \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\beta_i = (n-2)\pi + KA$$

따라서 측지적다각형의 넓이A는 그의 내각에 의해 결정된다.

11.57. C_n, $n = 1, 2, \cdots, n$이 $n \to \infty$일 때 점 P에 줄어드는 측지적삼각형의 무한수열이라 하자. 이때,

$$K(P) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{3}\beta_{\in} - \pi}{A_n}$$ 임을 증명하여라. 단, A_n은 C_n의 넓이이고 $\beta_{\in}$은 그의 내각이다.

〈풀이〉 예제 11.10에 의해, $\sum_{i=1}^{3}\beta_{\in} - \pi = \int\int_{R_n} KdS = KA_n$

따라서 $K(P) = \lim_{n\to\infty} K = \lim_{n\to\infty} \frac{KA_n}{A_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{3}\beta_{\in} - \pi}{A_n}$

11.58. S를 손잡이가 p개인 구면이라 하자. 이때,

(a) $p = 0$ 이면 $K(P) > 0$,

(b) $p = 1$ 이면 $K(P) = 0$,

(c) $p > 1$이면 $K(P) < 0$

를 만족하는 S 위의 점 P가 존재함을 증명하여라.

〈풀이〉 (a) $p = 0$ 이면 $\chi = 2(1-0) = 2$ 따라서 $\int\int_R KdS = KA = 4\pi > 0 \quad \Rightarrow K = 4\pi / A > 0$

그러므로 $K(P) > 0$인 S위의 점P가 존재한다.

(b) $p = 1$ 이면 $\chi = 2(1-1) = 0$ 따라서 $\int\int_R KdS = KA = 0 \Rightarrow K = 0$

그러므로 $K(P) = 0$ 인 S위의 점P가 존재한다.

(c) $p > 1 (\Rightarrow 1 - p < 0)$ 이면 $\chi = 2(1-p) < 0$. 따라서

$$\int\int_R KdS = KA = 4(1-p)\pi < 0 \quad \Rightarrow K = 4(1-p)\pi / A > 0$$

그러므로 $K(P) < 0$인 S위의 점P가 존재한다.

11.59. S를 Gauss곡률 $K < 0$인 곡면이라 하자. P_1, P_2, P_3, P_4 를 두 개의 맞은 변P_1P_2와 P_3P_4의 길이가 서로 같고 제3의 변P_2P_3과 수직인 단연결내부를 갖는 측지적사변형의 정점이라 하자. 이때, P_1과 P_4 사이의 내각은 예각임을 증명하여라.

〈풀이〉 문제 11.52에 의해, $\int\int_R KdS = \sum_{i=1}^{4}\beta_i - 2\pi$ $\quad(\beta_i$:점 P_i의 내각)

문제의 조건에 의해, P_2와 P_3의 내각. 즉, β_2와 β_3는 $\frac{\pi}{2}$값을 갖는다.

따라서, $\int\int_R KdS = \beta_1 + \beta_4 - \pi$, $K<0$ 이므로 $\beta_1+\beta_4<\pi$. 그리고 $|P_1P_2| = |P_3P_4|$ 이므로 결국, β_1와 β_4은 예각을 갖는다.

11.60. $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u,v)$ 를 매개변수 u가 측지선의 자연표현인 측지적좌표집합이라 하자. 이때, 만일 C가 좌표 조각사상 위에 자연표현된 측지선이고 $\boldsymbol{g}_1$과 $\boldsymbol{g}_2$가 각각 u와 $v-$매개변수곡선방향으로의 단위벡터이고$\boldsymbol{t}$가 C의 단위접선벡터일 때 $\boldsymbol{t}=(\cos\theta)\boldsymbol{g}_1+(\sin\theta)\boldsymbol{g}_2$ 로 정의되는 함수라면, C를 따라서 $\frac{d\theta}{ds}+\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\frac{dv}{ds}=0$ 임을 증명하여라.

〈풀이〉 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u,v)$ 를 u가 측지선을 따라서 자연매개변수인 측지좌표집합이므로 $E=\boldsymbol{x}_u\cdot\boldsymbol{x}_u=1$ 이다. 그리고 u와 $v-$매개변수곡선은 서로 수직이다.

Liouville의 공식에 의해, C의 측지곡률 $\kappa_g=\frac{d\theta}{ds}+\kappa_1\cos\theta+\kappa_2\sin\theta$ $(\kappa_1,\kappa_2$:u와$v-$매개곡선의 측지 곡률)

$$\kappa-1=-\frac{E_v}{2E\sqrt{G}}=0 \qquad \kappa_2=\frac{G_u}{2G\sqrt{E}}=\frac{G_u}{2G}cos\theta=\sqrt{E}\frac{du}{ds}=\frac{du}{ds} \qquad \sin\theta=\sqrt{G}\frac{dv}{ds}$$

$$\Rightarrow \kappa_g=\frac{d\theta}{ds}+\kappa_1\cos\theta+\kappa_2\sin\theta=\frac{d\theta}{ds}+\frac{G_u}{2\sqrt{G}}\frac{dv}{ds}=\frac{d\theta}{ds}+\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\frac{dv}{ds}$$

끝으로, C가 측지선이므로 $\kappa_g=0$. 그러므로 $\frac{d\theta}{ds}+\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\frac{dv}{ds}=0$

11.61. 앞 문제의 결과를 이용하여 한 정점을 측지(적)극좌표집합의 중심으로 택하여 측지적삼각형에 대한 Gauss-Bonnet의 공식을 유도하여라.

〈풀이〉 C가 측지적삼각형을 만드는 3개의 측지선으로 이루어졌다고 하면 C위에서 $\kappa_g=0$ 이다.

앞 문제에 의해, $\frac{d\theta}{ds}+\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\frac{dv}{ds}=\kappa_g=0$

$$0=\int_C\kappa_g ds=\int_C\frac{d\theta}{ds}ds+\int_C\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\frac{dv}{ds}ds=\int_C d\theta+\int\int_{R'}\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial u^2}dudv$$
$$=\int_C d\theta+\int\int_{R'}[-\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial u^2}](-\sqrt{G})dudv=\int_C d\theta-\int\int_{R'}[-\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial u^2}](\sqrt{G})dudv$$

(단, R'는 평면에서 $u=u(s)$ 와 $v=v(s)$의 내부와 경계)

식(11.11)에 의해 $0=\int_C\kappa_g ds=\int_C d\theta-\int\int_{R'}K\sqrt{G}dudv=\int_C d\theta-\int\int_R KdS$

(단, R은 C와 S위에 그의 내부와의 합)

따라서,

$$\int\int_R KdS=\int_C d\theta=2\pi-\sum_i\alpha_i$$