

연 습 문 제 (6.2)

1. 체 $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ 벡터공간 \mathbb{F}_2^6 에서

$$C = \{(0, 0, 0, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 1, 0, 1), \\ (0, 1, 1, 0, 1, 1), (1, 0, 0, 0, 1, 1), (1, 0, 1, 1, 0, 1), \\ (1, 1, 0, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 0, 0, 0)\}$$

는 어떤 유형의 이진 선형부호인지 말하여라.

그리고, 다음 원소가 C 에 속하는 부호어임을 확인하여라.

$$(0, 0, 1, 1, 1, 0) + (0, 1, 0, 1, 0, 1), \\ (1, 1, 0, 1, 1, 0) + (1, 1, 1, 0, 0, 0)$$

[답] 부호 C 는 체 \mathbb{F}_2 위의 6 차원 벡터공간 \mathbb{F}_2^6 의 3 차원 부분공간이므로
 C 는 이진 선형 (6, 3) 부호이다.

$$(0, 0, 1, 1, 1, 0) + (0, 1, 0, 1, 0, 1) = (0, 1, 1, 0, 1, 1) \in C, \\ (1, 1, 0, 1, 1, 0) + (1, 1, 1, 0, 0, 0) = (0, 0, 1, 1, 1, 0) \in C$$

2. 체 $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ 위의 4×7 행렬

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

를 이용하여 통신문 $u = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{F}_2^4$ 를

$$[x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6 \ x_7] = [a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4] G$$

으로 결정되는 부호어 $v = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) \in \mathbb{F}_2^7$ 로 변환할 때,
 통신문 (1, 0, 1, 0), (1, 0, 1, 1) 는 어떤 부호어로 변환되는지 말하여라.

[답] 통신문 (1, 0, 1, 0) 은 부호어 (1, 0, 1, 0, 0, 1, 1) 로 변환되고,
 통신문 (1, 0, 1, 1) 은 부호어 (1, 0, 1, 1, 0, 0, 0) 으로 변환된다.

3. 체 \mathbb{F}_2 위의 선형부호 C 가 동차 연립일차방정식

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

의 해공간일 때, C 의 원소를 모두 구하여라.

[풀이] 주어진 동차 연립일차방정식은 다음과 같다.

$$\begin{cases} x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_6 + x_7 = 0 \\ x_1 + x_3 + x_5 + x_7 = 0 \end{cases}$$

그런데 체 \mathbb{F}_2 에서 $1 + 1 = 0$, $-1 = 1$ 이므로 위의 동차 연립일차방정식은 다음과 같이 고쳐 쓸 수 있다.

$$\begin{cases} x_4 = x_5 + x_6 + x_7 \\ x_2 = x_3 + x_6 + x_7 \\ x_1 = x_3 + x_5 + x_7 \end{cases}$$

이제 x_3, x_5, x_6, x_7 에 0 또는 1을 대입하여 x_4, x_2, x_1 의 값을 결정하면, 다음과 같은 2^4 개의 C 의 원소를 얻는다.

0000000, 1101001, 0101010, 1000011,
1001100, 0100101, 1100110, 0001111,
1110000, 0011001, 1011010, 0110011,
0111100, 1010101, 0010110, 1111111

연 습 문 제 (6.3)

1. 체
- $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$
- 위의
- 2×5
- 행렬

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

를 생성행렬로 가지는 부호를 C 라고 할 때, C 에 속해 있는 부호어를 모두 구하고, C 는 어떤 유형의 선형부호인지 말하여라.

그리고, C 의 한 홀짝 검사행렬을 구하여라.

[풀이] $C = \{(0, 0, 0, 0, 0), (1, 0, 1, 0, 1), (0, 1, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 1, 1)\}$

부호 C 는 체 \mathbb{F}_2 위의 선형 $(5, 2)$ 부호

그리고, 체 \mathbb{F}_2 위의 3×5 행렬

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

는 C 의 홀짝 검사행렬이다.

2. 체
- $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$
- 위의
- 3×5
- 행렬

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

를 생성행렬로 가지는 부호를 C 라고 할 때, C 는 어떤 유형의 선형부호인지 말하고 또 C 의 한 홀짝 검사행렬을 구하여라.

[풀이] 분명히 $r(G) = 3$ 이므로 C 는 선형 $(5, 3)$ 부호이다.

그리고, 체 \mathbb{F}_2 위의 2×5 행렬

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

는 C 의 홀짝 검사행렬이다.

3. 체 $\mathbb{F}_3 = \{0, 1, 2\}$ 위의 3×5 행렬

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

를 홀짝 검사행렬로 가지는 부호를 C 라고 할 때, C 는 어떤 유형의 선형 부호인지 말하고 또 C 의 한 생성행렬을 구하여라.

[풀이] 분명히 $r(H) = 3$ 이므로 C 는 벡터공간 \mathbb{F}_3^6 의 2차원 부분공간이고, 따라서 C 는 체 \mathbb{F}_3 위의 선형 $(5, 2)$ 부호이다.

그리고, 다음과 같은 체 \mathbb{F}_3 위의 2×5 행렬은 C 의 생성행렬이다.

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

4. 체 $\mathbb{F}_3 = \{0, 1, 2\}$ 위의 4×7 행렬

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

를 홀짝 검사행렬로 가지는 부호를 C 라고 할 때, C 는 어떤 유형의 선형 부호인지를 말하고 또 C 의 한 생성행렬을 구하여라.

[풀이] 분명히 $r(H) = 4$ 이므로 C 는 벡터공간 \mathbb{F}_3^7 의 3차원부분공간이고, 따라서 C 는 체 \mathbb{F}_3 위의 선형 $(7, 3)$ 부호이다.

그리고, 다음과 같은 체 \mathbb{F}_3 위의 3×5 행렬은 C 의 생성행렬이다.

$$\begin{aligned} G &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

연 습 문 제 (6.4)

1. 체 \mathbb{F}_2 위의 선형 $(n, 1, n)$ 부호 $C = \{(0, 0, \dots, 0, 0), (1, 1, \dots, 1, 1)\}$ 에서 $n = 2t + 1$ 일 때, C 가 완전부호임을 증명하여라.

[풀이] 이진부호 C 에 대하여

$$q = 2, \quad n = 2t + 1, \quad k = 1$$

이므로 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} & q^k \left\{ 1 + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{t} (q-1)^t \right\} \\ &= 2 \left\{ 1 + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{t} \right\} \end{aligned}$$

한편,

$$\binom{n}{i} = \binom{n}{n-i} \quad (1 \leq i \leq t)$$

이고 또 $n - t = t + 1$ 므로, 위의 등식은 다음과 같이 변형된다.

$$\begin{aligned} & 2 \left\{ 1 + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{t} \right\} \\ &= \left\{ 1 + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{t} \right\} + \left\{ \binom{n}{n-t} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} \right\} \\ &= 1 + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{t} + \binom{n}{t+1} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} \\ &= (1 + 1)^n = 2^n = q^n \end{aligned}$$

따라서 C 는 완전부호이다.

3. 체 \mathbb{F}_2 위의 4×7 행렬

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

를 생성행렬로 가지는 부호를 C 라고 할 때, C 에 속하는 부호어를 모두 구하고 $d(C)$ 를 구하여라. 또, C 가 체 \mathbb{F}_2 위의 완전부호임을 밝혀라.

[풀이] 행렬 G 의 네 행벡터를 v_1, v_2, v_3, v_4 라고 하면

$$C = \{a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + a_4v_4 \mid a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{F}_2\}$$

이므로 C 는 다음과 같은 2^4 개의 부호어로 이루어져 있다.

$$\begin{aligned} &(0,0,0,0,0,0,0), (1,0,0,0,1,0,1), (0,1,0,0,1,1,1), \\ &(0,0,1,0,1,1,0), (0,0,0,1,0,1,1), (1,1,0,0,0,1,0), \\ &(1,0,1,0,0,1,1), (1,0,0,1,1,1,0), (0,1,1,0,0,0,1), \\ &(0,1,0,1,1,0,0), (0,0,1,1,1,0,1), (1,1,1,0,1,0,0), \\ &(1,1,0,1,0,0,1), (0,1,1,1,0,1,0), (1,0,1,1,0,0,0), \\ &(1,1,1,1,1,1,1) \end{aligned}$$

부호 C 에 속하는 영벡터가 아닌 부호어의 Hamming 무게 중에서 가장 작은 Hamming 무게는 3 이므로 $d(C) = 3$ 이다.

이진부호 C 에 대하여 $q = 2, n = 7, k = 4, d = 2t+1 = 3$ 이므로

$$q^k \left\{ 1 + \binom{n}{1} (q-1) \right\} = 2^4 (1 + 7) = 2^7 = q^n$$

이고 따라서 C 는 완전부호이다.

4. 체 $\mathbb{F}_3 = \{0, 1, 2\}$ 위의 2×4 행렬

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

를 생성행렬로 가지는 부호를 C 라고 할 때, $d(C)$ 를 구하여라.

그리고, C 가 체 \mathbb{F}_3 위의 완전부호인지를 판정하여라.

[풀이] 부호 C 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} C &= \{a_1(1, 0, 1, 1) + a_2(0, 1, 1, 2) \mid a_1, a_2 \in \mathbb{F}_3\} \\ &= \{(0, 0, 0, 0), (1, 0, 1, 1), (2, 0, 2, 2), \\ &\quad (0, 1, 1, 2), (0, 2, 2, 1), (1, 1, 2, 0), \\ &\quad (2, 2, 1, 0), (2, 1, 0, 1), (1, 2, 0, 2)\} \end{aligned}$$

부호 C 에 속하는 영벡터가 아닌 부호어의 Hamming 무게 중에서 가장 작은 Hamming 무게는 3 이므로 $d(C) = 3$ 이다.

그리고 $r(G) = 2$ 이므로 C 는 체 \mathbb{F}_3 위의 선형 $(4, 2)$ 부호이다.

그런데, $q = 3$, $n = 4$, $k = 2$, $d = 2t + 1 = 3$ 이므로

$$q^k \left\{ 1 + \binom{n}{1} (q - 1) \right\} = 3^2 (1 + 8) = 3^4 = q^n$$

이고, 따라서 C 는 완전부호가 아니다.

연 습 문 제 (6.5)

1. 체 \mathbb{F}_2 위의 선형부호 C 에 대하여 체 \mathbb{F}_2 위의 두 행렬

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

가 각각 C 의 생성행렬, 홀짝 검사행렬이라고 할 때, 다음 물음에 답하여라.

- (1) 부호 C 에 속해 있는 부호어를 모두 구하여라.
- (2) 부호 C 가 이진 선형 $(5, 2, 3)$ 부호임을 확인하여라.
- (3) 수신된 벡터가 $w = (1, 1, 1, 1, 0)$ 일 때, w 의 신드롬을 구하여 w 를 부호어 v 로 복호하여라.

[풀이] (1) C 에 속해 있는 부호어 전체는 다음과 같다.

$$(0, 0, 0, 0, 0), (1, 0, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 1, 1), (1, 1, 1, 0, 1)$$

(2) $r(G) = 2$ 이므로 C 는 이진 선형 $(5, 2)$ 부호이고, 또 C 에 속하는 영벡터가 아닌 부호어의 Hamming 무게 중에서 가장 작은 Hamming 무게는 3이므로 $d(C) = 3$ 이다. 따라서 C 는 이진 선형 $(5, 2, 3)$ 부호이다.

$$(3) S(w) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = S(e_2)$$

$$v = w - e_2 = w + (0, 1, 0, 0, 0) = (1, 0, 1, 1, 0)$$

2. 체 \mathbb{F}_2 위의 행렬

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

를 홀짝 검사행렬로 가지는 선형부호를 C 라고 할 때, 부호 C 는 체 \mathbb{F}_2 위의 선형 $(7, 4, 3)$ 부호이다(문제 6.2.3 참조).

수신된 벡터가 $w = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$ 일 때, w 의 신드롬을 구하여 w 를 부호어로 복호하여라.

[풀이]

$$S(w) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = S(e_6)$$

$$\begin{aligned} v = w - e_6 &= (1, 0, 0, 0, 0, 0, 1) - (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0) \\ &= (1, 0, 0, 0, 0, 1, 1) \end{aligned}$$

3. 체 $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ 위의 부호 C 에 대하여 체 \mathbb{F}_3 위의 행렬

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

가 C 의 생성행렬일 때, C 의 표준 홀짝 검사행렬 H 를 구하여라.

또, 수신된 벡터가 $w = (1, 0, 1, 0, 1, 0)$ 일 때, w 의 신드롬을 구하여 w 를 부호어로 복호하여라.

[풀이] 부호 C 의 홀짝 검사행렬은 다음과 같다.

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

그런데, w 의 신드롬은

$$S(w) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = S(e_4)$$

이고 또

$$\begin{aligned} v &= w - e_4 = (1, 0, 1, 0, 1, 0) - (0, 0, 0, 1, 0, 0) \\ &= (1, 0, 1, 1, 1, 0) \end{aligned}$$

이므로 w 는 부호어 $v = (1, 0, 1, 1, 1, 0)$ 으로 복호된다.

4. 체 $\mathbb{F}_3 = \{0, 1, 2\}$ 위의 행렬

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

를 생성행렬로 가지는 부호를 C 라 하고 다음 물음에 답하여라.

(1) 벡터공간 \mathbb{F}_3^4 에서의 C 의 잉여류를 모두 구하고, 또 각 잉여류의 선두 대표원을 구하여라. 그리고, 수신된 벡터가 $w = (0, 0, 1, 1)$ 일 때, 이들 잉여류를 이용하여 w 를 부호어로 복호하여라.

(2) 홀짝 검사행렬 H 를 구하여라.

또, 수신된 벡터가 $u = (1, 2, 1, 2)$ 일 때, u 를 부호어로 복호하여라.

[풀이] (1) 부호 C 는 체 \mathbb{F}_3 위의 선형 $(4, 2)$ 부호이고 C 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} C &= \{a_1(1, 0, 1, 1) + a_2(0, 1, 1, 2) \mid a_1, a_2 \in \mathbb{F}_3\} \\ &= \{(0, 0, 0, 0), (1, 0, 1, 1), (2, 0, 2, 2), \\ &\quad (0, 1, 1, 2), (0, 2, 2, 1), (1, 1, 2, 0), \\ &\quad (2, 2, 1, 0), (2, 1, 0, 1), (1, 2, 0, 2)\} \end{aligned}$$

따라서 벡터공간 \mathbb{F}_3^4 의 C 에 관한 잉여류의 개수는 $\frac{3^4}{3^2} = 3^2$ 이고 또 각 잉여류는 다음 표와 같다.

$(0,0,0,0)+C$	$(0,0,0,0), (1,0,1,1), (2,0,2,2), (0,1,1,2),$ $(0,2,2,1), (1,1,2,0), (2,2,1,0), (2,1,0,1), (1,2,0,2)$
$(1,0,0,0)+C$	$(1,0,0,0), (2,0,1,1), (0,0,2,2), (1,1,1,2),$ $(1,2,2,1), (2,1,2,0), (0,2,1,0), (0,1,0,1), (2,2,0,2)$
$(2,0,0,0)+C$	$(2,0,0,0), (0,0,1,1), (1,0,2,2), (2,1,1,2),$ $(2,2,2,1), (0,1,2,0), (1,2,1,0), (1,1,0,1), (0,2,0,2)$
$(0,1,0,0)+C$	$(0,1,0,0), (1,1,1,1), (2,1,2,2), (0,2,1,2),$ $(0,0,2,1), (1,2,2,0), (2,0,1,0), (2,2,0,1), (1,0,0,2)$
$(0,2,0,0)+C$	$(0,2,0,0), (1,2,1,1), (2,2,2,2), (0,0,1,2),$ $(0,1,2,1), (1,0,2,0), (2,1,1,0), (2,0,0,1), (1,1,0,2)$
$(0,0,1,0)+C$	$(0,0,1,0), (1,0,2,1), (2,0,0,2), (0,1,2,2),$ $(0,2,0,1), (1,1,0,0), (2,2,2,0), (2,1,1,1), (1,2,1,2)$
$(0,0,2,0)+C$	$(0,0,2,0), (1,0,0,1), (2,0,1,2), (0,1,0,2),$ $(0,2,1,1), (1,1,1,0), (2,2,0,0), (2,1,2,1), (1,2,2,2)$
$(0,0,0,1)+C$	$(0,0,0,1), (1,0,1,2), (2,0,2,0), (0,1,1,0),$ $(0,2,2,2), (1,1,2,1), (2,2,1,1), (2,1,0,2), (1,2,0,0)$
$(0,0,0,2)+C$	$(0,0,0,2), (1,0,1,0), (2,0,2,1), (0,1,1,1),$ $(0,2,2,0), (1,1,2,2), (2,2,1,2), (2,1,0,0), (1,2,0,1)$

이 표에서 잉여류의 선두 대표원은 각각 다음과 같다.

$$(0,0,0,0), (1,0,0,0), (2,0,0,0), (0,1,0,0), (0,2,0,0),$$

$$(0,0,1,0), (0,0,2,0), (0,0,0,1), (0,0,0,2)$$

수신된 벡터가 $w = 00011$ 일 때, w 는 위의 표의 제3 행에 있으므로 w 는 부호어 $v = (1,0,1,1)$ 로 복호된다.

(2) 홀짝 검사행렬 H 는 다음과 같다.

$$H = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

수신된 벡터가 $u = (1, 1, 1, 0)$ 일 때, $S(u)$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} S(u) &= H \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 2S(e_3) \end{aligned}$$

여기서 체 \mathbb{F}_3 에서 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 &= 2 + 2 + 1 = 2, \\ 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 &= 2 + 1 = 0 \end{aligned}$$

그런데,

$$\begin{aligned} v &= u - 2e_3 = (1, 1, 1, 0) - (0, 0, 2, 0) \\ &= (1, 1, -1, 0) = (1, 1, 2, 0) \end{aligned}$$

이므로 u 는 부호어 $v = (1, 1, 2, 0)$ 으로 복호된다.

연 습 문 제 (6.6)

1. 체
- $\mathbb{F}_3 = \{0, 1, 2\}$
- 위의 선형부호

$$C = \{(0, 0, 0), (1, 0, 1), (2, 0, 2), (0, 1, 2), (0, 2, 1), \\ (1, 1, 0), (2, 2, 0), (2, 1, 1), (1, 2, 2)\}$$

에 대하여, C 에 속하는 각 부호어의 첫째 성분만을 2 배하여 얻은 부호를 C' 이라고 할 때, 부호 C' 에 속해 있는 부호어를 모두 구하고 또 $d(C')$ 를 구하여라.

[풀이] 부호 C' 에 속해 있는 부호어 전체는 다음과 같다.

$$(0, 0, 0), (2, 0, 2), (1, 0, 1), (0, 2, 1), (0, 1, 2), \\ (2, 2, 0), (1, 1, 0), (1, 2, 2), (2, 1, 1)$$

그리고, $d(C') = 2$ 이다.

3. 체
- $\mathbb{F}_3 = \{0, 1, 2\}$
- 위의
- 3×6
- 행렬

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad G' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

에 대하여 G, G' 를 생성행렬로 가지는 부호를 각각 C, C' 이라고 할 때, C' 의 홀짝 검사행렬과 C 의 홀짝 검사행렬을 하나씩 구하여라.

[답] 부호 C' 의 홀짝 검사행렬

$$H' = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

부호 C 의 홀짝 검사행렬

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

3. 체 $\mathbb{F}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ 위의 2×5 행렬

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad H' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

를 홀짝 검사행렬로 가지는 부호를 각각 C, C' 이라고 할 때, 부호 C 의 한 생성행렬 G 와 부호 C' 의 한 생성행렬 G' 를 구하여라.

[답] 부호 C 의 생성행렬

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

부호 C 의 생성행렬

$$G' = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

4. 이진 선형부호 $\text{Ham}^*(3, 2)$ 가 완전부호인지를 판정하여라.

[풀이] $\text{Ham}^*(3, 2)$ 는 이진 선형 $(8, 4, 4)$ 부호이다. 여기서,

$$n = 8, \quad k = 4, \quad d = 4, \quad t = \left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{4-1}{2} \right\rfloor = 1$$

이므로 다음이 성립한다.

$$q^k \{1 + \binom{n}{1}(q-1)\} = 2^4 \{1 + \binom{8}{1}\} = 2^4 \cdot 9 < 2^8 = 2^n$$

따라서, 이진 선형부호 $\text{Ham}^*(3, 2)$ 는 완전부호가 아니다.

연 습 문 제 (6.7)

1. 보기 6.7.2의 부호 $\text{Ham}(2, 5)$ 를 사용하여 전송하는 경우에 수신된 벡터가 $w = (2, 0, 1, 0, 3, 1)$ 일 때 w 를 부호어로 복호하여라.

[풀이]

$$S(w) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = S(e_1)$$

여기서 체 \mathbb{F}_5 에서 다음이 성립한다.

$$0 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 1 = 1 + 3 + 1 = 0,$$

$$1 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 1 = 2 + 1 + 4 + 4 = 1$$

그런데,

$$\begin{aligned} v = w - e_1 &= (2, 0, 1, 0, 3, 1) - (1, 0, 0, 0, 0, 0) \\ &= (1, 0, 1, 0, 3, 1) \end{aligned}$$

이므로 w 는 부호어 $v = (1, 0, 1, 0, 3, 1)$ 로 변환된다.

3. 보기 6.7.4의 부호 $\text{Ham}(3, 3)$ 를 사용하여 전송하는 경우에 수신된 벡터가

$$w = (2, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 1, 1, 1)$$

일 때, w 를 부호어로 복호하여라.

[힌트] 체 \mathbb{F}_3 위에서 행렬

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

을 이용하여 w 의 신드롬 $S(w)$ 을 계산하여 구한다.

4. 체 \mathbb{F}_3 위의 Hamming 부호 $\text{Ham}(2, 3)$ 의 홀짝 검사행렬을 하나만 구하여라.

[풀이] 체 $\mathbb{F}_3 = \{0, 1, 2\}$ 위의 벡터공간 \mathbb{F}_3^2 에는 다음과 같은 12개의 1차원 부분공간이 존재한다.

$$\langle (0, 1) \rangle, \langle (1, 0) \rangle, \langle (1, 1) \rangle, \langle (1, 2) \rangle$$

따라서 체 \mathbb{F}_3 위의 2×4 행렬

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

를 Hamming 부호 $\text{Ham}(2, 3)$ 의 홀짝 검사행렬로 택할 수 있다. ,

5. 체 $\mathbb{F}_7 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 위의 Hamming 부호 $\text{Ham}(2, 7)$ 의 홀짝 검사행렬을 하나만 구하여라.

[답]

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

6. 체 $\mathbb{F}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ 위의 Hamming 부호 $\text{Ham}(3, 5)$ 는 체 \mathbb{F}_5 위의 어떤 유형의 선형부호인지를 말하여라.

또, 체 \mathbb{F}_7 위의 Hamming 부호 $\text{Ham}(3, 7)$ 는 체 \mathbb{F}_7 위의 어떤 유형의 선형부호인지를 말하여라.

[답] 부호 $\text{Ham}(3, 5)$ 는 체 \mathbb{F}_5 위의 선형 $(31, 28, 3)$ 부호이다.

부호 $\text{Ham}(3, 7)$ 는 체 \mathbb{F}_7 위의 선형 $(57, 54, 3)$ 부호이다.

7. 이진 선형부호 C 가 체 \mathbb{F}_2 위의 3×4 행렬

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

를 홀짝 검사행렬로 가지는 부호일 때 $d(C)$ 를 구하여라.

[풀이] 이제 행렬 H 의 네 열벡터를

$$w_1 = (1, 0, 0), w_2 = (0, 1, 0), w_3 = (0, 0, 1), w_4 = (0, 1, 1)$$

이라고 하자. 이 때,

$$w_4 = (0, 1, 1) = (0, 1, 0) + (0, 0, 1) = w_2 + w_3$$

이므로

$$w_2 + w_3 + w_4 = (0, 0, 0)$$

$$\text{즉, } 0w_1 + 1w_2 + 1w_3 + 1w_4 = (0, 0, 0)$$

이고 따라서 w_2, w_3, w_4 는 일차종속이며 또

$$v = (0, 1, 1, 1) \in C$$

이고 $d(v) = 3$ 이다.

한편, 네 열벡터 w_1, w_2, w_3, w_4 중에서 어느 두 벡터를 택하여도 이들 두 벡터는 일차독립이다.

따라서 정리 6.7.3 에 의하여 $d(C) = 3$ 이다.

8. 체 \mathbb{F}_2 위의 4×7 행렬

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

를 생성행렬로 가지는 부호를 C 라고 할 때, C 의 표준 홀짝 검사행렬 H 를 구하고 $d(C) = 3$ 임을 확인하여라.

[풀이] 부호 C 의 표준 홀짝 검사행렬 H 는 다음과 같다.

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

이제 행렬 H 의 7개의 열벡터를 w_1, w_2, \dots, w_7 이라고 하자.

이 때,

$$w_1 = (1, 0, 1) = (1, 0, 0) + (0, 0, 1) = w_5 + w_7$$

이므로

$$w_1 + w_5 + w_7 = (0, 0, 0)$$

이고 따라서 w_1, w_5, w_7 는 일차종속이며 또

$$v = (1, 0, 0, 0, 1, 0, 1) \in C$$

이고 $d(v) = 3$ 이다.

한편, 7개의 열벡터 w_1, w_2, \dots, w_7 중에서 어느 두 벡터를 택하여도 이들 두 벡터는 일차독립이다.

따라서 정리 6.7.3에 의하여 $d(C) = 3$ 이다.