

## 연 습 문 제 (5.2)

1. 체  $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ 에서의 무한수열  $\{a_t\}$ 가 점화식

$$a_{t+2} = a_t(1 + a_{t+1}) \quad (t = 0, 1, 2, \dots)$$

를 만족시킬 때,  $a_0 = 1, a_1 = 1$ 인 경우에  $\{a_t\}$ 를 결정하여라.

[풀이]  $a_0 = 1,$

$$a_1 = 1,$$

$$a_2 = a_0(1 + a_1) = 1 \cdot (1+1) = 0,$$

$$a_3 = a_1(1 + a_2) = 1 \cdot (1+0) = 1 = a_1,$$

$$a_4 = a_2(1 + a_3) = 0 \cdot (1+1) = 0 = a_2,$$

$$a_5 = a_3(1 + a_4) = 1 \cdot (1+0) = 1,$$

$$a_6 = a_4(1 + a_5) = 0 \cdot (1+1) = 0,$$

$\vdots$

그러므로

$$\{a_t\} : 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots$$

이고 따라서

$$_1\{a_t\} : 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots$$

이므로  $\{a_t\}$ 는 궁극적 순환수열이고 그 주기는 2이다.

2. 체  $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ 에서의 무한수열  $\{a_t\}$ 가 동차 선형점화식

$$a_{t+3} = 1 + a_t + a_{t+2} \quad (t = 0, 1, 2, \dots)$$

를 만족시키는 점화수열일 때, 초기조건이  $a_0 = 0, a_1 = 0, a_2 = 1$ 인

경우에  $\{a_t\}$ 는 주기 7인 순환수열임을 밝혀라.

[풀이]  $a_0 = 0, a_1 = 0, a_2 = 1$

$$a_3 = 1 + a_0 + a_2 = 1 + 0 + 1 = 0,$$

$$a_4 = 1 + a_1 + a_3 = 1 + 0 + 0 = 1,$$

$$a_5 = 1 + a_2 + a_4 = 1 + 1 + 1 = 1,$$

$$a_6 = 1 + a_3 + a_5 = 1 + 0 + 1 = 0,$$

$$a_7 = 1 + a_4 + a_6 = 1 + 1 + 0 = 0 = a_0,$$

$$a_8 = 1 + a_5 + a_7 = 1 + 1 + 0 = 0 = a_1,$$

$$a_9 = 1 + a_6 + a_8 = 1 + 0 + 0 = 1 = a_2$$

$\vdots$

따라서  $\{a_t\}$  는 다음과 같은 주기 7 인 순환수열이다.

$$\{a_t\} : 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, \dots$$

4. 체  $\mathbb{F}_3 = \{0, 1, 2\}$  에서의 무한수열  $\{a_t\}$  가 점화식

$$a_{t+2} = a_t(1 + a_{t+1}) \quad (t = 0, 1, 2, \dots)$$

를 만족시킬 때,  $a_0 = 1, a_1 = 1$  인 경우에  $\{a_t\}$  를 결정하여라.

[풀이]  $a_0 = 1, a_1 = 1$

$$a_2 = a_0(1 + a_1) = 1 \cdot (1 + 1) = 2,$$

$$a_3 = a_1(1 + a_2) = 1 \cdot (1 + 2) = 0,$$

$$a_4 = a_2(1 + a_3) = 2 \cdot (1 + 0) = 2 = a_2,$$

$$a_5 = a_3(1 + a_4) = 0 \cdot (1 + 2) = 0 = a_3,$$

$$a_6 = a_4(1 + a_5) = 2 \cdot (1 + 0) = 2,$$

$$a_7 = a_5(1 + a_6) = 0 \cdot (1 + 2) = 0,$$

$\vdots$

그러므로

$$\{a_t\} : 1, 1, 2, 0, 2, 0, 2, 0, 2, 0, \dots$$

이고 따라서

$${}_2\{a_t\} : 2, 0, 2, 0, 2, 0, 2, 0, 2, 0, \dots$$

이므로  $\{a_t\}$  는 궁극적 순환수열이고 그 주기는 2 이다.

5. 체  $\mathbb{F}_3 = \{0, 1, 2\}$ 에서의 무한수열  $\{a_t\}$ 가 동차 선형점화식

$$a_{t+3} = a_t + a_{t+1} + a_{t+2} \quad (t = 0, 1, 2, \dots)$$

를 만족시키는 점화수열일 때,  $a_0 = 0, a_1 = 0, a_2 = 1$ 인 경우에  $\{a_t\}$ 는 주기 13인 순환수열임을 밝혀라.

[풀이]  $a_0 = 0, a_1 = 0, a_2 = 1$

$$a_3 = a_0 + a_1 + a_2 = 0 + 0 + 1 = 1,$$

$$a_4 = a_1 + a_2 + a_3 = 0 + 1 + 1 = 2,$$

$$a_5 = a_2 + a_3 + a_4 = 1 + 1 + 2 = 1,$$

$$a_6 = a_3 + a_4 + a_5 = 1 + 2 + 1 = 1,$$

$$a_7 = a_4 + a_5 + a_6 = 2 + 1 + 1 = 1,$$

$$a_8 = a_5 + a_6 + a_7 = 1 + 1 + 1 = 0,$$

$$a_9 = a_6 + a_7 + a_8 = 1 + 1 + 0 = 2,$$

$$a_{10} = a_7 + a_8 + a_9 = 1 + 0 + 2 = 0,$$

$$a_{11} = a_8 + a_9 + a_{10} = 0 + 2 + 0 = 2,$$

$$a_{12} = a_9 + a_{10} + a_{11} = 2 + 0 + 2 = 1,$$

$$a_{13} = a_{10} + a_{11} + a_{12} = 0 + 2 + 1 = 0 = a_0,$$

$$a_{14} = a_{11} + a_{12} + a_{13} = 2 + 1 + 0 = 0 = a_1,$$

$$a_{15} = a_{12} + a_{13} + a_{14} = 1 + 0 + 0 = 1 = a_2$$

.

따라서

$$\{a_t\} : 0, 0, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 0, 2, 0, 2, 1,$$

$$0, 0, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 0, 2, 0, 2, 1, \dots$$

이므로  $\{a_t\}$ 는 주기가 13인 순환수열이다.

## 연 습 문 제 (5.3)

1. 체  $\mathbb{F}_2$  위의 3 차의 다항식  $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3$ 에 대하여

$\{a_t\} \in \Omega(f(x))$  일 때 다음 물음에 답하여라.

- (1)  $\{a_t\}$ 가 만족시키는 동차 선형점화식을 써라.
- (2)  $\{a_t\}$ 의 초기 상태벡터가  $(a_0, a_1, a_2) = (0, 0, 1)$ 일 때,  $\{a_t\}$ 의 주기와 생성순환마디를 구하여라.
- (3)  $\{a_t\}$ 의 초기 상태벡터가  $(a_0, a_1, a_2) = (1, 1, 1)$ 일 때,  $\{a_t\}$ 의 주기와 생성순환마디를 구하여라.
- (4)  $f(x)$ 의 동반행렬  $A$ 를 구하고 또  $A$ 의 역행렬  $A^{-1}$ 를 구하여라.

[풀이] (1)  $a_{t+3} = a_t + a_{t+1} + a_{t+2}$

(2)  $a_0 = 0, a_1 = 0, a_2 = 1,$

$$a_3 = a_0 + a_1 + a_2 = 0 + 0 + 1 = 1,$$

$$a_4 = a_1 + a_2 + a_3 = 0 + 1 + 1 = 0 = a_0,$$

$$a_5 = a_2 + a_3 + a_4 = 1 + 1 + 0 = 0 = a_1,$$

$$a_6 = a_3 + a_4 + a_5 = 1 + 0 + 0 = 1 = a_2,$$

$\vdots$

따라서

$$\{a_t\} : 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, \dots$$

이므로  $\{a_t\}$ 는 주기가 4인 순환수열이고 그 생성순환마디는  $0, 0, 1, 1$ 이다.

$$(4) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} [A | I] &= \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ &\rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] = [I | A^{-1}] \end{aligned}$$

2. 체  $\mathbb{F}_2$ 에서의 4 차의 다항식

$$f(x) = 1 + x + x^4$$

에 대하여  $\{a_t\} \in \mathcal{Q}(f(x))$  일 때, 다음 물음에 답하여라.

- (1)  $\{a_t\}$  가 만족시키는 동차 선형점화식을 구하여라.
- (2)  $\{a_t\}$  의 초기 상태벡터가  $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (1, 1, 0, 1)$  일 때,  $\{a_t\}$  의 주기와 그 생성순환마디를 구하여라.
- (3)  $\{a_t\}$  의 초기 상태벡터가  $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (0, 0, 0, 1)$  일 때,  $\{a_t\}$  의 주기와 그 생성순환마디를 구하여라.
- (4)  $f(x)$  의 동반행렬  $A$  를 구하고 또  $A$  의 역행렬  $A^{-1}$  를 구하여라.

[풀이] (1)  $a_{t+4} = a_t + a_{t+1}$

(2)  $a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = 1,$

$$a_4 = a_0 + a_1 = 1 + 1 = 0,$$

$$a_5 = a_1 + a_2 = 1 + 0 = 1,$$

$$a_6 = a_2 + a_3 = 0 + 1 = 1,$$

$$a_7 = a_3 + a_4 = 1 + 0 = 1,$$

$$a_8 = a_4 + a_5 = 0 + 1 = 1,$$

$$a_9 = a_5 + a_6 = 1 + 1 = 0,$$

$$a_{10} = a_6 + a_7 = 1 + 1 = 0,$$

$$a_{11} = a_7 + a_8 = 1 + 1 = 0,$$

$$a_{12} = a_8 + a_9 = 1 + 0 = 1,$$

$$a_{13} = a_9 + a_{10} = 0 + 0 = 0,$$

$$a_{14} = a_{10} + a_{11} = 0 + 0 = 0,$$

$$a_{15} = a_{11} + a_{12} = 0 + 1 = 1 = a_0,$$

$$a_{16} = a_{12} + a_{13} = 1 + 0 = 1 = a_1,$$

$$a_{17} = a_{13} + a_{14} = 0 + 0 = 0 = a_2,$$

$$a_{18} = a_{14} + a_{15} = 0 + 1 = 1 = a_3,$$

$\vdots$

따라서  $\{a_t\}$ 는 주기 15 인 순환수열이고 그 생성순환마디는 다음과 같다.

$$1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0$$

$$(4) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

3. 체  $\mathbb{F}_2$  에서의 동차 선형점화수열  $\{a_t\}$  가 동차 선형점화식

$$a_{t+4} = a_t + a_{t+1} + a_{t+2} + a_{t+3} \quad (t = 0, 1, 2, \dots)$$

을 만족시킬 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) 체  $\mathbb{F}_2$  위의 4 차의 다항식

$$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$$

는  $\{a_t\}$  의 고유다항식임을 확인하여라.

(2)  $\{a_t\}$  의 초기 상태벡터가  $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (0, 0, 0, 1)$  일 때,  $\{a_t\}$  의 주기와 생성순환마디를 구하여라.

(3)  $\{a_t\}$  의 초기 상태벡터가  $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (1, 0, 1, 0)$  일 때,  $\{a_t\}$  의 주기와 생성순환마디를 구하여라.

(4)  $f(x)$  의 동반행렬  $A$  를 구하여라.

[풀이] (1) 체  $\mathbb{F}_2$  에서  $-1 = 1$  이다.

그런데,  $f(x) = -1 - x - x^2 - x^3 + x^4$  이므로  $f(x)$  는 다음과 같다.

$$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$$

(2)  $a_0 = 0, a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 1,$

$$a_4 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 + 0 + 0 + 1 = 1,$$

$$a_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0 + 0 + 1 + 1 = 0 = a_0,$$

$$a_6 = a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 0 + 1 + 1 + 0 = 0 = a_1,$$

$$a_7 = a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 1 + 1 + 0 + 0 = 0 = a_2,$$

$$a_8 = a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 1 + 0 + 0 + 0 = 1 = a_3,$$

$\vdots$

따라서

$$\{a_t\} : 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, \dots$$

이므로  $\{a_t\}$  는 주기 5 인 순환수열이고 생성순환마디는  $0, 0, 0, 1, 1$ 이다.

(4) 동반행렬  $A$  는 다음과 같은 체  $\mathbb{F}_2$  위의 4 차의 행렬이다.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

4. 체  $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$  위의 3 차의 정칙행렬

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

의 위수가 7 임을 밝히고 이 결과를 이용하여  $A^{-1}$  를 구하여라.

[풀이].

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A^5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^6 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^7 = I$$

따라서 곱셈군  $\text{GL}_3(\mathbb{F}_2)$  에서  $A$  의 위수는 7 이다.

그러므로  $A^{-1}$  는 다음과 같다.

$$A^{-1} = A^6 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

한편,  $|\text{GL}_3(\mathbb{F}_2)| = (2^3 - 1)(2^3 - 2)(2^3 - 2^2) = 7 \cdot 6 \cdot 4$  이다.

5. 체  $\mathbb{F}_3 = \{0, 1, 2\}$  에서의 무한수열  $\{a_t\}$  가 동차 선형점화식

$$a_{t+3} = 2a_t + a_{t+1} + a_{t+2} \quad (t = 0, 1, 2, \dots)$$

을 만족시키는 동차 선형점화수열일 때, 다음 물음에 다방여라.

- (1) 체  $\mathbb{F}_3$  위의 3 차의 다항식  $f(x) = 1 + 2x + 2x^2 + x^3$  는  $\{a_t\}$  의 고유다항식임을 확인하여라.
- (2)  $\{a_t\}$  의 초기 상태벡터가  $(a_0, a_1, a_2) = (1, 0, 1)$  일 때,  $\{a_t\}$  의 주기와 생성순환마디를 구하여라.
- (3)  $\{a_t\}$  의 초기 상태벡터가  $(a_0, a_1, a_2) = (0, 0, 1)$  일 때,  $\{a_t\}$  의 주기와 생성순환마디를 구하여라.
- (4)  $f(x)$  의 동반행렬  $A$  를 구하고 또  $A$  의 역행렬  $A^{-1}$  를 구하여라.

[풀이] 체  $\mathbb{F}_3$  에서 다음이 성립한다.

$$-1 = 2, \quad -2 = 1, \quad 2 \cdot 2 = 1$$

- (1)  $f(x) = -2 - x - x^2 + x^3$  이므로  $f(x)$  는 다음과 같다.

$$f(x) = 1 + 2x + 2x^2 + x^3$$

- (2)  $a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = 1,$

$$a_3 = 2a_0 + a_1 + a_2 = 2 + 0 + 1 = 0,$$

$$a_4 = 2a_1 + a_2 + a_3 = 0 + 1 + 0 = 1 = a_0,$$

$$a_5 = 2a_2 + a_3 + a_4 = 2 + 0 + 1 = 0 = a_1,$$

$$a_6 = 2a_2 + a_3 + a_4 = 0 + 1 + 0 = 1 = a_2,$$

$\vdots$

따라서

$$\{a_t\} : 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots$$

이므로  $\{a_t\}$  는 주기 2 인 순환수열이고 그 생성순환마디는 1, 0 이다.



$$\begin{aligned}
(2) \quad & a_0 = 0, a_1 = 0, a_2 = 1, \\
& a_3 = 2a_0 + a_1 + a_2 = 0 + 0 + 1 = 1, \\
& a_4 = 2a_1 + a_2 + a_3 = 0 + 1 + 1 = 2, \\
& a_5 = 2a_2 + a_3 + a_4 = 2 + 1 + 2 = 2, \\
& a_6 = 2a_3 + a_4 + a_5 = 2 + 2 + 2 = 0 = a_0, \\
& a_7 = 2a_4 + a_5 + a_6 = 2 \cdot 2 + 2 + 0 = 0 = a_1, \\
& a_8 = 2a_5 + a_6 + a_7 = 2 \cdot 2 + 0 + 0 = 1 = a_2, \\
& \vdots
\end{aligned}$$

따라서

$$\{a_t\} : 0, 0, 1, 1, 2, 2, 0, 0, 1, 1, 2, 2, \dots$$

이므로  $\{a_t\}$  는 주기 6인 순환수열이고 그 생성순환마디는  $0, 0, 1, 1, 2, 2$  이다.

(4) 동반행렬  $A$  는 다음과 같은 체  $\mathbb{F}_3$  위의 3 차의 행렬이다.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

이제 덧붙인 행렬  $[A \mid I_3]$  에 적당한 기본 행 변형을 유한 번 시행하면 다음과 같이 기약 행 사다리꼴 행렬로 변형된다.

$$\begin{aligned}
[A \mid I_3] &= \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \\
&\rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{array} \right]
\end{aligned}$$

따라서  $A$  는 정칙행렬이고 또  $A$  의 역행렬  $A^{-1}$  는 다음과 같다.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



3. 체  $\mathbb{F}_3 = \{0, 1, 2\}$  위에서 다음 식을 형식적 멱급수로 나타내어라.

$$(1) \frac{1}{1+x^4} \qquad (2) \frac{1+x+x^2}{1+x+x^3+x^4}$$

[풀이] 체  $\mathbb{F}_3$  에서  $-1 = 2$ ,  $-2 = 1$  이다.

(1) 다음이 성립한다(보기 5.4.2 참조).

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x^4} &= \frac{1}{1-(-x^4)} \\ &= 1 - x^4 + x^{2 \cdot 4} - x^{3 \cdot 4} + x^{4 \cdot 4} + \cdots \\ &= \sum_{t=0}^{\infty} (-1)^t x^{4t} \end{aligned} \qquad \begin{array}{l} 1-x^4+x^8+\cdots \\ 1+x^4 \overline{) 1} \\ \underline{1+x^4} \phantom{+} \\ -x^4 \phantom{+} \\ \underline{-x^4-x^8} \phantom{+} \\ x^8 \phantom{+} \\ \vdots \end{array}$$

$$\begin{aligned} (2) \frac{1+x+x^2}{1+x+x^3+x^4} &= 1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^7 + \cdots \\ &= (1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^7)(1 - x^9 + x^{18} + \cdots) \\ &= (1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^7) \left( \sum_{t=0}^{\infty} (-1)^t x^{9t} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l} 1+x^2+x^3+x^4+x^5+x^7-x^9+\cdots \\ 1+x+x^3+x^4 \overline{) 1+x+x^2} \\ \underline{1+x+} \phantom{x^2+} x^3+x^4 \\ \phantom{1+x+} x^2-x^3-x^4 \\ \phantom{1+x+} x^2+x^3+\phantom{x^4} x^5+x^6 \\ \phantom{1+x+} x^3-x^4-x^5-x^6 \\ \phantom{1+x+} x^3+x^4+\phantom{x^5+} x^6+x^7 \\ \phantom{1+x+} x^4-x^5+x^6-x^7 \\ \phantom{1+x+} x^4+x^5+\phantom{x^6+} x^7+x^8 \\ \phantom{1+x+} x^5+x^6+x^7-x^8 \\ \phantom{1+x+} x^5+x^6+\phantom{x^7+} x^8+x^9 \\ \phantom{1+x+} x^7+x^8-x^9 \\ \phantom{1+x+} x^7+x^8+\phantom{x^9+} x^{10}+x^{11} \\ \phantom{1+x+} -x^9-x^{10}-x^{11} \\ \phantom{1+x+} \vdots \end{array}$$



5. 체  $\mathbb{F}_2$  에서의 무한수열  $\{a_t\}$  가 동차 선형점화식

$$a_{t+4} = a_t + a_{t+2} + a_{t+3} \quad (t = 0, 1, 2, \dots)$$

을 만족시키는 동차 선형점화수열일 때 다음 물음에 답하여라.

(1)  $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (0, 0, 0, 1)$  인 경우에  $\{a_t\}$  의 생성함수  $G(x)$  를 구하고 또  $\{a_t\}$  를 구하여라.

(2)  $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (1, 1, 0, 0)$  인 경우에  $\{a_t\}$  의 생성함수  $G(x)$  를 구하고 또  $\{a_t\}$  를 구하여라.

[풀이] 다항식  $f(x) = 1 + x^2 + x^3 + x^4$  는  $\{a_t\}$  의 고유다항식이고 또 그 상반 다항식은  $f^*(x) = 1 + x + x^2 + x^4$  이다.

(1) 초기 상태벡터가  $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (0, 0, 0, 1)$  인 경우에  $\{a_t\}$  의 생성함수를  $G(x) = \sum_{t=0}^{\infty} s_t x^t$  라고 하면 다음이 성립한다.

$$f^*(x) G(x) = (1 + x + x^2 + x^4)(x^3 + a_4 x^4 + \dots) = x^3 = g(x)$$

$$\begin{aligned} G(x) &= \frac{g(x)}{f^*(x)} = \frac{x^3}{1 + x + x^2 + x^4} \\ &= (x^3 + x^4 + x^6)(1 + x^7 + x^{14} + \dots) \\ &= x^3 + x^4 + x^6 + x^{10} + x^{11} + x^{13} + \dots \end{aligned}$$

따라서  $\{a_t\}$  는 다음과 같이 주기가 7 이고 생성순환마디가 0 0 0 1 1 0 1 인 순환수열이다.

$$\{a_t\} : 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ \dots$$

$$\begin{array}{r} 1+x+x^2+x^4 \overline{) x^3 + x^4 + x^6 + x^{10} + \dots} \\ \underline{x^3 + x^4 + x^5 \phantom{+ x^7}} \phantom{+ x^8} \\ x^4 + x^5 \phantom{+ x^6} + x^7 \phantom{+ x^8} \\ \underline{x^4 + x^5 + x^6 \phantom{+ x^7} + x^8} \phantom{+ x^{10}} \\ x^6 + x^7 + x^8 \phantom{+ x^{10}} \\ \underline{x^6 + x^7 + x^8 \phantom{+ x^{10}}} + x^{10} \\ x^{10} \end{array}$$

8. 실수체  $\mathbb{R}$ 에서의 무한수열  $\{a_t\}$ 가 다음 두 조건을 만족시키는 동차 선형 점화수열이라고 하자.

$$(i) \ a_0 = 1, a_1 = -2 \quad (ii) \ a_{t+2} = -6a_t + 5a_{t+1} \quad (t = 0, 1, 2, \dots)$$

이 선형점화수열의 생성함수를  $G(x)$ 라고 할 때, 다음이 성립함을 밝혀라.

$$G(x) = \frac{5}{1-2x} - \frac{4}{1-3x},$$

$$a_t = 5 \cdot 2^t - 4 \cdot 3^t \quad (t = 0, 1, 2, \dots)$$

[풀이] 다항식

$$f(x) = 6 - 5x + x^2$$

는  $\{a_t\}$ 의 고유다항식이고 또 그 상반다항식은

$$f^*(x) = 1 - 5x + 6x^2 = (1-2x)(1-3x)$$

이므로 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} f^*(x) G(x) &= (1 - 5x + 6x^2)(1 - 2x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots) \\ &= 1 + (-2 - 5)x = 1 - 7x \end{aligned}$$

$$G(x) = \frac{1-7x}{f^*(x)} = \frac{1-7x}{(1-2x)(1-3x)}$$

그런데, 적당한 두 실수  $A, B$ 에 대하여

$$\frac{1-7x}{(1-2x)(1-3x)} = \frac{A}{1-2x} + \frac{B}{1-3x}$$

이라고 놓으면,

$$1 - 7x = A(1 - 3x) + B(1 - 2x)$$

$$\text{즉,} \quad 1 - 7x = (A+B) - (3A+2B)x$$

이므로  $A+B=1$ ,  $3A+2B=7$  이고 따라서

$$A = 5, B = -4$$

이므로  $G(x)$ 는 다음과 같다.

$$G(x) = \frac{5}{1-2x} - \frac{4}{1-3x}$$

한편, 보기 5.4.2 에 의하여

$$\frac{1}{1-2x} = \sum_{t=0}^{\infty} 2^t x^t, \quad \frac{1}{1-3x} = \sum_{t=0}^{\infty} 3^t x^t$$

이므로

$$G(x) = 5 \sum_{t=0}^{\infty} 2^t x^t - 4 \sum_{t=0}^{\infty} 3^t x^t = \sum_{t=0}^{\infty} (5 \cdot 2^t - 4 \cdot 3^t) x^t$$

이고 또 다음 결과를 얻는다.

$$a_t = 5 \cdot 2^t - 4 \cdot 3^t \quad (t = 0, 1, 2, \dots)$$

9. 실수체  $\mathbb{R}$  에서의 무한수열  $\{a_t\}$  가 다음 두 조건을 만족시키는 점화수열이라고 하자.

$$(i) \ a_0 = 10 \quad (ii) \ a_{t+1} = 3a_t + 2 \quad (t = 0, 1, 2, \dots)$$

이 점화수열의 생성함수를  $G(x)$  라고 할 때,  $(1-3x)G(x)$  와  $G(x)$  를 구하고 또 다음이 성립함을 밝혀라.

$$a_t = 11 \cdot 3^t - 1 \quad (t = 0, 1, 2, \dots)$$

[풀이] 점화수열  $\{a_t\}$  의 생성함수를  $G(x)$  라고 하면,

$$\begin{aligned} & G(x) - 3xG(x) \\ &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots \\ & \quad - 3a_0x - 3a_1x^2 - 3a_2x^3 - 3a_3x^4 - \dots \\ &= a_0 + (a_1 - 3a_0)x + (a_2 - 3a_1)x^2 + (a_3 - 3a_2)x^3 + \dots \end{aligned}$$

이고 또 두 조건에 의하여

$$a_0 = 10, \quad a_{t+1} - 3a_t = 2 \quad (t = 0, 1, 2, \dots)$$

이므로 다음이 성립한다(보기 5.4.2).

$$\begin{aligned} G(x) - 3xG(x) &= 10 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + 2x^4 + \dots \\ &= 8 + 2(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots) \\ &= 8 + \frac{2}{1-x}, \end{aligned}$$

$$G(x) = \frac{8}{1-3x} + \frac{2}{(1-3x)(1-x)}$$

한편, 적당한 두 실수  $A, B$ 에 대하여

$$\frac{2}{(1-3x)(1-x)} = \frac{A}{1-3x} + \frac{B}{1-x}$$

이라고 놓으면,

$$2 = A(1-x) + B(1-3x) \quad \text{즉} \quad 2 = (A+B) - (A+3B)x$$

이므로

$$A+B=2, \quad A+3B=0$$

이고, 따라서  $A=3, B=-1$  이다. 그러므로  $G(x)$  는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} G(x) &= \frac{8}{1-3x} + \frac{2}{(1-3x)(1-x)} \\ &= \frac{8}{1-3x} + \frac{3}{1-3x} - \frac{1}{1-x} \\ &= \frac{11}{1-3x} - \frac{1}{1-x} \end{aligned}$$

한편, 보기 5.4.2 에 의하여

$$\frac{1}{1-3x} = \sum_{t=0}^{\infty} 3^t x^t, \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{t=0}^{\infty} x^t$$

이므로

$$G(x) = 11 \sum_{t=0}^{\infty} 3^t x^t - \sum_{t=0}^{\infty} x^t = \sum_{t=0}^{\infty} (11 \cdot 3^t - 1) x^t$$

이고 따라서 다음 결과를 얻는다.

$$a_t = 11 \cdot 3^t - 1 \quad (t = 0, 1, 2, \dots)$$



10. 실수체  $\mathbb{R}$  위에서 임의의 실수  $a$ 에 대하여 다음이 성립함을 밝혀라.

$$\frac{1}{(1-ax)^2} = \sum_{t=0}^{\infty} (t+1) a^t x^t, \quad \frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{t=0}^{\infty} t a^t x^t$$

[풀이] 보기 5.4.2 에 의하여

$$\frac{1}{1-ax} = 1 + ax + a^2 x^2 + a^3 x^3 + \dots$$

이므로 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(1-ax)^2} \\ &= (1 + ax + a^2 x^2 + a^3 x^3 + \dots)(1 + ax + a^2 x^2 + a^3 x^3 + \dots) \\ &= 1 + (a+a)x + (a^2+a^2+a^2)x^2 + (a^3+a^3+a^3+a^3)x^3 + \dots \\ &= 1 + 2ax + 3a^2 x^2 + 4a^3 x^3 + 5a^4 x^4 + \dots \\ &= \sum_{t=0}^{\infty} (t+1) a^t x^t \\ & \frac{x}{(1-x)^2} = x \cdot \frac{1}{(1-x)^2} \\ &= 0 + x + 2ax^2 + 3a^2 x^3 + 4a^3 x^4 + 5a^4 x^5 + \dots \\ &= \sum_{t=0}^{\infty} t a^t x^t \end{aligned}$$

11. 실수체  $\mathbb{R}$  에서의 무한수열  $\{a_t\}$  가 다음 두 조건을 만족시키는 동차 선형 점화수열이라고 하자.

$$(i) \ a_0 = 2, \ a_1 = 1 \quad (ii) \ a_{t+2} = -4a_t + 4a_{t+1} \quad (t = 0, 1, 2, \dots)$$

위의 문제 10 을 이용하여 다음이 성립함을 밝혀라.

$$a_t = (2 - \frac{3}{2} t) 2^t \quad (t = 0, 1, 2, \dots)$$

[풀이] 다항식

$$f(x) = 4 - 4x + x^2$$

는  $\{a_t\}$  의 고유다항식이고  $f(x)$  의 상반다항식  $f^*(x)$  는 다음과 같다.

$$f^*(x) = 1 - 4x + 4x^2 = (1 - 2x)^2$$

이제  $\{a_t\}$  의 생성함수를  $G(x)$  이라고 하면 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} f^*(x) G(x) &= (1 - 4x + 4x^2)(2 + x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots) \\ &= 2 + (1 - 8)x = 2 - 7x \end{aligned}$$

$$G(x) = \frac{2 - 7x}{f^*(x)} = \frac{2}{(1 - 2x)^2} - \frac{7x}{(1 - 2x)^2}$$

그런데 문제 10 에 의하여

$$\frac{1}{(1 - 2x)^2} = \sum_{t=0}^{\infty} (t+1) 2^t x^t, \quad \frac{2x}{(1 - 2x)^2} = \sum_{t=0}^{\infty} t 2^t x^t$$

이므로  $G(x)$  는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} G(x) &= 2 \sum_{t=0}^{\infty} (t+1) 2^t x^t - \frac{7}{2} \sum_{t=0}^{\infty} t 2^t x^t \\ &= \sum_{t=0}^{\infty} \{2(t+1) - \frac{7}{2} t\} 2^t x^t \\ &= \sum_{t=0}^{\infty} (2 - \frac{3}{2} t) 2^t x^t \end{aligned}$$

따라서 다음 결과를 얻는다.

$$a_t = (2 - \frac{3}{2} t) 2^t \quad (t = 0, 1, 2, \dots)$$